

@'

CURS DE ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

MIRCEA OLTEANU

Cuprins

1	Spații Banach și spații Hilbert	1
1.1	Spații Banach	1
1.2	Spații Hilbert	7
2	Operatori pe spații finit dimensionale	21
2.1	Noțiuni de algebră liniară	21
2.2	Norma unui operator; continuitate	27
2.3	Diagonalizarea operatorilor normali	29
3	Teoreme fundamentale	47
3.1	Operatori pe spații normate	47
3.2	Teorema Hahn-Banach	54
3.3	Principiul mărginirii uniforme	62
3.4	Teorema aplicației deschise	65
3.5	Teorema lui Alaoglu	68
4	Algebre Banach	73
4.1	Rezultate generale	73
4.2	Algebre Banach comutative	83
4.3	C^* -algebre comutative	94
5	Operatori pe spații Hilbert	101
5.1	Adjunctul unui operator	101
5.2	Proiectori	106
5.3	Exemple de operatori pe spații Hilbert	110
5.4	Operatori normali	134
6	Aplicații în teoria sistemelor	147
6.1	Cauzalitate și invarianță în timp	148
6.2	Spațiul stărilor	155

Introducere

Acest curs de analiză funcțională este urmarea lecțiilor ținute de autor studenților anilor III din Facultățile de Automatică și Electronică ale Universității Politehnice București. În consecință, lucrarea se adresează în primul rând studenților și cadrelor didactice din învățământul superior cu profil tehnic. Conținutul lucrării a fost determinat atât de cerințele programei de analiză funcțională cât și de cunoștințele acumulate de studenți în primii doi ani la cursurile de matematică. Din această cauză, principalele referințe bibliografice sunt manuale universitare utilizate de studenții facultăților cu profil tehnic. Primul capitol are un caracter recapitulativ, el conținând rezultate generale despre spații Banach și Hilbert; o atenție specială a fost acordată unor exemple care vor fi citate frecvent în restul lucrării. În capitolul al doilea, după o scurtă revedere a unor noțiuni de algebră liniară, este prezentată teoria spectrală a operatorilor normali pe spații finit dimensionale. Teoremele de bază ale analizei funcționale: teorema Hahn-Banach, principiul mărginirii uniforme, teorema aplicației deschise, teorema graficului închis și teorema lui Alaoglu constituie subiectul capitolului 3. În capitolul 4 sunt prezentate rezultate din teoria algebrelor Banach, inclusiv teoria lui Gelfand asupra algebrelor comutative. Capitolul 5 conține rezultate de bază din teoria operatorilor liniari și continui pe spații Hilbert infinit dimensionale. Sunt studiate câteva clase importante de operatori: translații, operatori de multiplicare, operatori integrali și de convoluție. Teoria spectrală a operatorilor normali și unele aplicații (ca de exemplu calculul funcțional) sunt abordate în finalul acestui capitol. Ultimul capitol are un caracter aplicativ; aici sunt prezentate modele matematice pentru noțiuni importante din teoria sistemelor, ca de exemplu cauzalitate, invarianță în timp, spațiul stărilor.

Capitolul 1

Spații Banach și spații Hilbert

1.1 Spații Banach

În acest paragraf vom prezenta noțiuni și rezultate generale din teoria spațiilor normate. Vom presupune cunoscute conceptele uzuale din teoria spațiilor vectoriale și a spațiilor metrice, așa cum sunt prezentate în [1] și [8]. O atenție specială o vom acorda unor exemple de spații Banach ce vor fi folosite frecvent în restul lucrării. Rezultate mai avansate din teoria spațiilor Banach vor fi date în capitolul 3.

1. Definiție

Fie X un spațiu vectorial complex.

O aplicație $\| \cdot \|: X \rightarrow [0, \infty)$ cu proprietățile:

(a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(c) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

pentru orice $x, y \in X$ și $\alpha \in \mathbb{C}$, se numește **normă**. O aplicație care verifică doar condițiile (a) și (b) se numește **seminormă**.

Perechea $(X, \| \cdot \|)$ se numește **spațiu normat**. Orice spațiu normat este și spațiu metric, distanța dintre x și y fiind, prin definiție,

$d(x, y) = \|x - y\|$. Dacă în plus orice șir Cauchy este convergent, atunci

$(X, \| \cdot \|)$ se numește **spațiu Banach** (sau spațiu normat complet). Se poate demonstra ușor că operațiile algebrice sunt continue: dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ și

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$ și analog pentru înmulțirea cu scalari. Dacă X este un spațiu vectorial și $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ sunt două norme pe X ,

atunci ele se numesc **echivalente** dacă există c și k două constante pozitive astfel încât $\|x\|_1 \leq c \|x\|_2 \leq k \|x\|_1$; în acest caz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ în $\| \cdot \|_1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ în $\| \cdot \|_2$, deci structurile topologice coincid.

Fie X și Y două spații vectoriale; o aplicație $T : X \rightarrow Y$ se numește **aplicație liniară** (sau **operator liniar**) dacă:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Spațiile vectoriale X și Y se numesc **izomorfe** dacă există $T : X \rightarrow Y$ o aplicație liniară și bijectivă. În acest caz, T se numește **izomorfism de spații vectoriale**. Este simplu de demonstrat că inversul unui izomorfism de spații vectoriale este de asemenea operator liniar.

Două spații normate $(X, \|\cdot\|_1)$ și $(Y, \|\cdot\|_2)$ se numesc **spații normate izomorfe** dacă există între ele un izomorfism F de spații vectoriale cu proprietatea $\|F(x)\|_2 = \|x\|_1$; în acest caz, F se numește **izomorfism de spații normate**. Dacă aplicația liniară F verifică egalitatea $\|F(x)\|_2 = \|x\|_1$, (fără a fi neapărat bijectivă), atunci F se numește **izometrie liniară**.

O noțiune importantă care se poate defini într-un spațiu normat este cea de **serie convergentă**.

2. Definiție

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat și fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de elemente din X . Spunem că **seria** $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ este **convergentă la** $x \in X$ (numit în acest caz **suma seriei**)

dacă **șirul sumelor parțiale**, $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ converge la x . Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$

se numește **absolut convergentă** dacă seria (de numere reale și pozitive) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ este convergentă. Cu o demonstrație asemănătoare celei de la seria

de numere reale se poate arăta că într-un spațiu Banach orice serie absolut convergentă este convergentă, reciproc fiind, în general, falsă. Este interesant faptul că această proprietate caracterizează spațiile normate complete.

3. Propoziție

Un spațiu normat $(X, \|\cdot\|)$ este complet dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_n)_n \subset X$ cu proprietatea că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ este convergentă, rezultă că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ este convergentă.

Demonstrație. Să presupunem că $(X, \|\cdot\|)$ este un spațiu normat în care este verificată ipoteza din enunț și fie $(x_n)_n \subset X$ un șir Cauchy. Fie $k \in \mathbb{N}$ și fie $n_k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $i, j \geq n_k$ să avem $\|x_i - x_j\| < 2^{-k}$. Dacă definim $y_1 = x_1$ și $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ și $k \geq 2$, atunci seria $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|y_k\|$ este convergentă. Din ipoteză rezultă că seria $\sum_{k \in \mathbb{N}} y_k$ este convergentă și deci șirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge la un element $x \in X$. Este ușor

de arătat că șirul $(x_n)_n$ converge la x . Cealaltă implicație o lăsăm ca exercițiu.

Încheiem acest paragraf cu o listă de spații Banach ce vor fi citate frecvent în continuare.

4.Exemple

(i) Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat și fie

$$C^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_j \in C, \forall j = 1, 2, \dots, n\}$$

cu structura uzuală de spațiu vectorial. Cu **norma euclidiană**:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2},$$

C^n este spațiu Banach, ([8],p.64); propunem cititorului ca exercițiu afirmația că următoarele două norme sunt echivalente cu norma euclidiană:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}.$$

Cu aceleași norme, și R^n este spațiu Banach.

(ii) Spațiile $\ell^p(Z)$ și $\ell^p(N)$

Fie $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, fixat și fie

$$\ell^p(Z) = \{x : Z \rightarrow C; \sum_{n \in Z} |x(n)|^p \text{ este convergentă}\}.$$

Facem precizarea că dacă $(a_n)_{n \in Z}$ este un șir de numere complexe indexat după Z , atunci seria $\sum_{n \in Z} a_n$ este convergentă dacă seriile $\sum_{n=-\infty}^0 a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sunt amândouă convergente.

Este evident că pentru orice $\alpha \in C$ și $x \in \ell^p(Z)$, șirul $(\alpha x)(n) = \alpha x(n)$ este în $\ell^p(Z)$. Fie acum $x, y \in \ell^p(Z)$ și fie $(x+y)(n) = x(n) + y(n)$. Notând

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in Z} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

atunci, din inegalitatea lui Minkovski, ([8],p.259), rezultă inegalitatea $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$; celelalte proprietăți din definiția spațiului normat sunt evidente. Demonstrăm în continuare completitudinea. Dacă $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ este un

șir Cauchy în $\ell^p(Z)$ și dacă $\epsilon > 0$, atunci există $k_\epsilon \in N$ astfel încât $\|x^k - x^j\|_p < \epsilon, \forall k, j \geq k_\epsilon$. De aici rezultă:

$$\sum_{n \in Z} |x^k(n) - x^j(n)|^p < \epsilon^p, \forall k, j \geq k_\epsilon, \quad (1.1)$$

și deci pentru orice $n \in N$, avem $|x^k(n) - x^j(n)| < \epsilon, \forall k, j \geq k_\epsilon$, ceea ce arată că șirul $(x^k(n))_{k \in N}$ este șir Cauchy (de numere complexe) pentru orice $n \in N$, deci este convergent; fie $x(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k(n)$. Din relația (1.1), pentru $j \rightarrow \infty$, rezultă $\sum_{n \in Z} |x^k(n) - x(n)|^p \leq \epsilon^p, \forall k \geq k_\epsilon$, adică $x^k - x \in \ell^p(Z), \forall k \geq k_\epsilon$.

De aici rezultă că $x \in \ell^p(Z)$ și $\|x^k - x\|_p \leq \epsilon, \forall k \geq k_\epsilon$, ceea ce încheie demonstrația.

Analog se definesc spațiile $\ell^p(N) = \{x : N \rightarrow C; \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$.

(iii) Spațiul $\ell^\infty(Z)$

Fie $\ell^\infty(Z) = \{x : Z \rightarrow C; x \text{ șir mărginit}\}$. Cu operațiile uzuale, definite în exemplul anterior, $\ell^\infty(Z)$ este spațiu vectorial. Este ușor de arătat că aplicația $\|x\|_\infty = \sup_{n \in Z} |x(n)|$ este normă. Pentru a demonstra completitudinea,

să considerăm $(x^k)_{k \in N}$ un șir Cauchy în $\ell^\infty(Z)$ și $\epsilon > 0$. Atunci există $k_\epsilon \in N$ astfel încât $\|x^k - x^j\|_\infty < \epsilon, \forall k, j \geq k_\epsilon$, și deci șirul $(x^k(n))_{k \in N}$ este șir Cauchy (de numere complexe) pentru orice $n \in Z$. Există deci $x(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k(n)$. Șirul x astfel construit este în $\ell^\infty(Z)$ și este limita (în $\ell^\infty(Z)$) a lui $(x^k)_{k \in N}$:

$$\|x^k - x\|_\infty = \sup_{n \in Z} \lim_{j \rightarrow \infty} |x^k(n) - x^j(n)| \leq \epsilon.$$

Analog se definește spațiul $\ell^\infty(N)$.

(iv) Spațiile $L^p(\Omega, \mu)$

Prezentăm în continuare spațiile de funcții măsurabile. Vom presupune cunoscute construcțiile și rezultatele de bază din teoria măsurii și integralei (așa cum sunt prezentate, de exemplu, în [8],[19],[13]).

Fie $\Omega \neq \emptyset$, fie \mathfrak{N} o σ -algebră de părți ale lui Ω și fie $\mu : \mathfrak{N} \rightarrow [0, \infty]$ o măsură pozitivă. Fie $p \in R, p \geq 1$, fixat. Pentru orice funcție măsurabilă $f : \Omega \rightarrow C$, definim

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mulțimea

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow C; f \text{ măsurabilă și } \|f\|_p < \infty\}$$

este spațiu vectorial cu operațiile uzuale pentru funcții, iar $\| \cdot \|_p$ este o seminormă pe $L^p(\Omega, \mu)$. Identificând funcțiile egale a.p.t. (în raport cu măsura μ) și notând cu $L^p(\Omega, \mu)$ mulțimea claselor de echivalență astfel obținute, se demonstrează că $(L^p(\Omega, \mu), \| \cdot \|_p)$ este spațiu Banach, ([8], p.260). Funcțiile din $L^1(\Omega, \mu)$ se numesc **integrabile** (în raport cu măsura μ), iar cele din $L^p(\Omega, \mu)$ se numesc **p -integrabile**.

Indicăm în continuare câteva cazuri particulare remarcabile.

Dacă $\Omega = Z$ și μ este măsura de numărare, atunci se obțin spațiile $\ell^p(Z)$ din exemplul (ii).

Spațiile de funcții p -integrabile pe R în raport cu măsura Lebesgue vor fi notate mai simplu cu $L^p(R)$.

Alt caz important se obține considerând $\Omega = \mathcal{S}^1 = \{\lambda \in C, |\lambda| = 1\}$ și μ măsura Lebesgue pe cercul unitate (normalizată, adică $\mu(\mathcal{S}^1) = 1$); și în acest caz vom nota spațiile de funcții p -integrabile cu $L^p(\mathcal{S}^1)$.

Un rezultat remarcabil referitor la funcții p -integrabile este

Inegalitatea lui Hölder

Fie $p > 1$ și $q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci, pentru orice funcții $f \in L^p(\Omega, \mu)$ și $g \in L^q(\Omega, \mu)$, avem:

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q .$$

În general, pentru Ω arbitrar, dacă $1 \leq p_1 \leq p_2$, nu există o relație de incluziune între spațiile $L^{p_1}(\Omega, \mu)$ și $L^{p_2}(\Omega, \mu)$. Totuși, în cazurile particulare $\Omega = Z$ și $\Omega = \mathcal{S}^1$, au loc următoarele incluziuni ([19], p.209):

$$\ell^{p_1}(Z) \subseteq \ell^{p_2}(Z), \forall 1 \leq p_1 \leq p_2;$$

$$L^{p_2}(\mathcal{S}^1) \subseteq L^{p_1}(\mathcal{S}^1), \forall 1 \leq p_1 \leq p_2.$$

În particular, au loc incluziunile:

$$\ell^1(Z) \subset \ell^2(Z) \text{ și } L^2(\mathcal{S}^1) \subset L^1(\mathcal{S}^1).$$

Ultimele două incluziuni rezultă direct din inegalitățile:

$$\| x \|_1^2 = \left(\sum_{n \in Z} |x(n)| \right) \left(\sum_{m \in Z} |x(m)| \right) \geq \sum_{n \in Z} |x(n)|^2 = \| x \|_2^2, \forall x \in \ell^1(Z),$$

$$\| f \|_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| \cdot 1 dt \leq \| f \|_2^2, \forall f \in L^2(\mathcal{S}^1).$$

Pentru ultima inegalitate am folosit inegalitatea lui Holder pentru $p = q = 2$ și faptul că funcția constantă $\mathbf{1}$ este în $L^2(\mathcal{S}^1)$.

Să reținem deci că:

$$\text{Dacă } x \in \ell^2(Z) \text{ avem } \| x \|_2 \leq \| x \|_1 .$$

Dacă $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ avem $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$.

Menționăm că în cazul $\Omega = R$, nu există o relație de incluziune între $L^1(R)$ și $L^2(R)$.

Teoremele de densitate joacă un rol important în studiul spațiilor $L^p(\Omega, \mu)$. Amintim două rezultate în acest sens.

Teoremă

Mulțimea $L^1(\Omega, \mu) \cap L^2(\Omega, \mu)$ este densă în $L^2(\Omega, \mu)$.

În particular, de aici rezultă că $\ell^1(Z)$ este dens în $\ell^2(Z)$.

Al doilea rezultat se referă la funcții continue.

Să presupunem că pe mulțimea Ω s-a definit și o structură de spațiu metric (mai general, este suficient ca pe Ω să fie definită o topologie local compactă; pentru noțiuni de topologie generală, recomandăm [3], p.77), iar măsura μ este o măsură boreliană regulată (măsura Lebesgue, atât pe R , cât și pe \mathcal{S}^1 are aceste proprietăți). În acest caz, avem:

Teoremă

Mulțimea funcțiilor continue cu suport compact definite pe Ω cu valori complexe este densă (în sensul normei $\|\cdot\|_p$) în spațiul $L^p(\Omega, \mu)$; bibliografie: [13], pag.68; [8], p.262; [19], p.211.

(v) Spațiul $\mathcal{C}(\mathcal{D})$

Fie \mathcal{D} un spațiu metric compact (mai general, este suficient ca \mathcal{D} să fie un spațiu topologic compact: a se vedea [3], p.92) și fie

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \{f : \mathcal{D} \rightarrow C; f \text{ continuă}\}.$$

Cu operațiile uzuale, $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ este spațiu vectorial. Structura de spațiu Banach este definită de **norma supremum**:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathcal{D}} |f(t)|.$$

Pentru demonstrații, recomandăm [3], p.189; [8], p.89; [5], p.10.

(vi) Spațiul $L^\infty(\Omega, \mu)$

Fie (Ω, μ) ca mai sus. Pentru orice funcție măsurabilă $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$, considerăm mulțimea

$A(f) = \{t \in R; \mu(f^{-1}(t, \infty)) = 0\}$. Dacă $A(f) = \emptyset$, atunci, prin definiție, $\text{esssup}(f) = \infty$. Dacă $A(f) \neq \emptyset$, atunci, prin definiție, $\text{esssup}(f) =$

$\inf A(f)$. Numărul (eventual ∞) $\text{esssup}(f)$ se numește **marginea superioară esențială** (sau **supremumul esențial**)

a funcției f . Pentru o funcție măsurabilă arbitrară, $f : \Omega \rightarrow C$ definim

$$\|f\|_{\infty} = \text{esssup}(|f|).$$

Mulțimea $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow C; \|f\|_{\infty} < \infty\}$ este spațiu vectorial împreună cu operațiile uzuale, iar aplicația $\|\cdot\|_{\infty}$ este o seminormă. Identificând funcțiile egale a.p.t. (în raport cu măsura μ), obținem **spațiul Banach al funcțiilor esențial mărginite**, pe care îl vom nota $L^{\infty}(\Omega, \mu)$; bibliografie: [8], p.261; [19], p.205; [13], p.60. Din definiție, rezultă următoarele două implicații:

(a) Dacă $|f| \leq m$ a.p.t., atunci, $\|f\|_{\infty} \leq m$.

(b) Pentru orice $\epsilon > 0$, există o mulțime măsurabilă $A \subseteq \Omega$ astfel încât $\mu(A) > 0$ și $|f(t)| > \|f\|_{\infty} - \epsilon, \forall t \in A$.

De fapt, conceptul de funcție esențial mărginită, este o generalizare a noțiunii uzuale de funcție mărginită, "modulo mulțimi de măsură nulă": o funcție măsurabilă f este esențial mărginită dacă și numai dacă există o mulțime măsurabilă $A \subseteq \Omega$ astfel încât $\mu(\Omega - A) = 0$ și restricția lui f la mulțimea A să fie funcție mărginită.

Evident că orice funcție mărginită este esențial mărginită. Dacă Ω este un spațiu topologic compact, iar μ este o măsură boreliană pe Ω atunci orice funcție continuă este mărginită și deci și esențial mărginită: $\mathcal{C}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega, \mu)$. În acest caz, supremumul esențial al unei funcții continue coincide cu supremumul funcției.

Indicăm în continuare câteva cazuri particulare. Spațiul Banach al șirurilor mărginite, $\ell^{\infty}(Z)$ se obține pentru $\Omega = Z$ și μ măsura de numărare. $L^{\infty}(R)$ va fi spațiul Banach al funcțiilor esențial mărginite pe R în raport cu măsura Lebesgue, iar $L^{\infty}(\mathcal{S}^1)$ spațiul Banach al funcțiilor esențial mărginite pe cercul unitate în raport cu măsura Lebesgue (pe cerc).

1.2 Spații Hilbert

Principalul concept geometric ce nu poate fi definit satisfăcător într-un spațiu Banach este perpendicularitatea. Noțiunea de produs scalar, (pe care-l introducem în continuare) este instrumentul care permite construirea unei teorii geometrice apropiate de cea euclidiană în cadrul abstract al spațiilor vectoriale. În acest paragraf prezentăm noțiunile și rezultatele de bază din teoria spațiilor Hilbert. Deoarece unele dintre acestea vor fi date fără demonstrații, recomandăm următoarele surse bibliografice pentru completarea informației:

[1], [8], [4], [5], [6].

5. Definiție

Fie X un spațiu vectorial complex; se numește **produs scalar pe X** orice aplicație $\langle, \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ care, pentru orice $x, y, z \in X$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, verifică proprietățile:

$$(a) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$(b) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(c) \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$(d) \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Perechea (X, \langle, \rangle) se numește **spațiu cu produs scalar** (sau **spațiu prehilbertian**).

6. Observație

Fie (H, \langle, \rangle) un spațiu cu produs scalar. Atunci, pentru orice vectori $x, y \in H$, avem:

(a) **relația de polarizare:**

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \\ &= \frac{1}{4}(\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle + \\ &+ i \langle x + iy, x + iy \rangle - i \langle x - iy, x - iy \rangle). \end{aligned}$$

(b) **inegalitatea lui Schwarz:**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}.$$

(c) Aplicația $\| \cdot \|: H \rightarrow [0, \infty)$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ este o normă pe H ; o vom numi **norma definită de produsul scalar**.

(d) Produsul scalar este aplicație continuă: dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \text{ atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Demonstrațiile se pot găsi în: [1], p.334; [8], p.317; [4], p.147; [5], pag.64.

7. Definiție

Fie (H, \langle, \rangle) un spațiu prehilbertian și fie $\| \cdot \|$ norma indusă de produsul scalar. Dacă $(H, \| \cdot \|)$ este complet atunci (H, \langle, \rangle) se numește **spațiu Hilbert**. Doi vectori $x, y \in H$ se numesc **ortogonali** (sau **perpendicularari**) dacă $\langle x, y \rangle = 0$. Vectorul x se numește **ortogonal pe submulțimea** nevidă $M \subseteq H$ (și vom nota $x \perp M$) dacă x este ortogonal pe toți vectorii din M . **Ortogonalul mulțimii M** este, prin definiție, $M^\perp = \{y \in H; y \perp x, \forall x \in M\}$. Este simplu de arătat că M^\perp este subspațiu vectorial închis în H (se folosește continuitatea produsului scalar). Propunem de asemenea ca

exercițiu egalitatea (aici bara înseamnă închiderea mulțimii respective):

$(K^\perp)^\perp = \overline{K}$, pentru orice subspațiu $K \subseteq H$. Dacă $M \neq \{0\}$, atunci $M^\perp \neq H$. Submulțimea nevidă $M \subseteq H$ se numește **ortogonală** dacă $x \perp y, \forall x, y \in M$ și **ortonormală** dacă, în plus, $\|x\|=1, \forall x \in M$.

Două spații Hilbert $(H_1, \langle, \rangle_1)$ și $(H_2, \langle, \rangle_2)$ se numesc **izomorfe** dacă există un izomorfism U de spații vectoriale de la H_1 la H_2 astfel încât $\langle Ux, Uy \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$. Aplicația U se numește în acest caz **izomorfism de spații Hilbert** sau **operator unitar**.

Următoarele două proprietăți sunt generalizări ale unor rezultate din geometria elementară.

8. Propoziție

(a) Fie (H, \langle, \rangle) un spațiu prehilbertian. Atunci:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in H.$$

(b) Reciproc, dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spațiu normat astfel încât este verificată egalitatea de la punctul (a), atunci există un produs scalar \langle, \rangle pe X astfel încât $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$; (**legea paralelogramului**).

(c) Pentru orice mulțime finită ortogonală de vectori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ din spațiul prehilbertian H , are loc egalitatea (**teorema lui Pitagora**):

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

Pentru demonstrații se pot consulta [1], p.118; [8], p.317; [4], p.148.

Următorul rezultat este fundamental în studiul spațiilor Hilbert. Reamintim că o submulțime M a unui spațiu vectorial se numește **convexă** dacă $\alpha x + (1 - \alpha)y \in M, \forall x, y \in M, \forall \alpha \in [0, 1]$.

9. Teoremă

Fie H un spațiu Hilbert și fie $M \subseteq H$ o mulțime nevidă, închisă și convexă. Atunci există și este unic un vector $x_M \in M$ astfel încât

$$\|x_M\| = \inf\{\|x\|; x \in M\}.$$

Demonstrație Să notăm cu $\delta = \inf\{\|x\|; x \in M\}$ și fie $(x_n)_n$ un șir de elemente din M astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \delta$. Deoarece M este mulțime convexă, rezultă că pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$ avem $\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m \in M$ și deci:

$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \geq \delta^2, \forall n, m \in N.$$

Aplicând legea paralelogramului vectorilor $\frac{1}{2}x_n$ și $\frac{1}{2}x_m$ și folosind inegalitatea de mai sus, rezultă:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 &= 2 \left\| \frac{x_n}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{x_m}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - \delta^2 \end{aligned}$$

și deci :

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4\delta^2.$$

De aici rezultă că $\limsup_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|^2 = 0$, ceea ce arată că $(x_n)_n$ este șir Cauchy; fie $x_M = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Deoarece M este mulțime închisă, rezultă că $x_M \in M$, iar din continuitatea normei avem $\|x_M\| = \delta$. Pentru a demonstra unicitatea, presupunem prin absurd că există x_M și y_M în M , diferiți, astfel încât $\|x_M\| = \|y_M\| = \delta$. Aplicând legea paralelogramului vectorilor x_M și y_M și repetând raționamentul anterior, rezultă $\|x_M - y_M\| = 0$, ceea ce constituie o contradicție.

10. Consecință (teorema proiecției pe un subspațiu închis)

Fie H un spațiu Hilbert și fie $K \subseteq H$ un subspațiu închis. Atunci, pentru orice $x \in H$, există și este unic $y \in K$ astfel încât $x - y \in K^\perp$ și $\|x - y\| \leq \|x - z\|$, pentru orice $z \in K$. Elementul y (care depinde în mod evident de x și K) se numește **proiecția lui x pe K** . Pentru demonstrație se aplică teorema precedentă.

Rezultatul următor este o generalizare în spații Hilbert a descompunerii unui vector după două direcții perpendiculare din geometria euclidiană.

11. Teoremă (descompunerea ortogonală)

Fie H un spațiu Hilbert și fie K un subspațiu închis al său. Atunci, pentru orice vector $x \in H$ există $y \in K$ și $z \in K^\perp$ astfel încât $x = y + z$; în plus, această descompunere este unică. Vom nota această descompunere ortogonală $H = K \oplus K^\perp$.

Demonstrație Fie $x \in H$, arbitrar fixat. Aplicând teorema 9 mulțimii nevide, convexe și închise $M = \{x - u, u \in K\}$, rezultă că există un vector unic $z \in M$ cu proprietatea $\|z\| = \inf\{\|v\|; v \in M\}$. Fie $u \in K$ astfel încât

$\|u\| = 1$; atunci $z - \langle z, u \rangle u \in M$ și deci:

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\leq \|z - \langle z, u \rangle u\|^2 = \langle z - \langle z, u \rangle u, z - \langle z, u \rangle u \rangle = \\ &= \|z\|^2 - \overline{\langle z, u \rangle} \langle z, u \rangle - \langle z, u \rangle \overline{\langle z, u \rangle} + |\langle z, u \rangle|^2 = \\ &= \|z\|^2 - |\langle z, u \rangle|^2, \end{aligned}$$

ceea ce este posibil numai dacă $\langle z, u \rangle = 0$. Am demonstrat deci că $z \in K^\perp$. Din definiția lui M rezultă că există $y \in K$ astfel încât $x = y + z$. Pentru a demonstra unicitatea, presupunem prin absurd că există $y_1, y_2 \in K$ și $z_1, z_2 \in K^\perp$ astfel încât $y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ și $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$. De aici rezultă că $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$; dar $y_1 - y_2 \in K$ și $z_2 - z_1 \in K^\perp$, și deci $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in K \cap K^\perp = \{0\}$, contradicție care încheie demonstrația.

12. Definiție

Fie X un spațiu normat. Se numește **funcțională** pe X orice aplicație $f : X \rightarrow C$. Așa cum vom vedea în capitolul 3, funcționalele liniare și continue au un rol deosebit în studiul spațiilor Banach. Pe spații Hilbert este adevărat următorul rezultat remarcabil (teorema lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe un spațiu Hilbert).

13. Teorema lui Riesz

Fie H un spațiu Hilbert.

(a) Pentru orice $y \in H$, fixat, aplicația $f_y : H \rightarrow C, f_y(x) = \langle x, y \rangle$ este funcțională liniară și continuă.

(b) Reciproc, dacă f este o funcțională liniară și continuă pe H , atunci există și este unic un vector $y_f \in H$ astfel încât $f(x) = \langle x, y_f \rangle$,

$\forall x \in H$; în plus, are loc egalitatea (semnificația ei va fi dată în lema 5, cap. 3):

$$\sup\{|f(x)|; x \in H \text{ și } \|x\| = 1\} = \|y_f\|.$$

Demonstrație Punctul (a) este evident (pentru continuitate se folosește inegalitatea lui Schwarz).

(b) Fie $\text{Ker}(f) = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$ nucleul aplicației f . Dacă $\text{Ker}(f) = H$, atunci f este identic nulă și deci putem lua $y_f = 0$. Dacă $\text{Ker}(f) \neq H$, atunci există $z \in \text{Ker}(f)^\perp$ cu proprietatea $\|z\| = 1$ și $f(z) \neq 0$. Pentru orice $x \in H$, vectorul $x - \left(\frac{f(x)}{f(z)}\right)z$ este în $\text{Ker}(f)$, și deci:

$$f(x) = f(x) \langle z, z \rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)}z, \overline{f(z)}z \right\rangle =$$

$$= \langle x - \frac{f(x)}{f(z)}z, \overline{f(z)}z \rangle + \langle \frac{f(x)}{f(z)}z, \overline{f(z)}z \rangle = \langle x, \overline{f(z)}z \rangle,$$

și deci putem alege $y_f = \overline{f(z)}z$. Unicitatea lui y_f este imediată. Din inegalitatea lui Schwarz, rezultă

$$\begin{aligned} \sup\{|f(x)|; x \in H \text{ și } \|x\|=1\} &= \sup\{|\langle x, y_f \rangle|; x \in H \text{ și } \|x\|=1\} \leq \\ &\leq \sup\{\|x\| \|y_f\|; x \in H \text{ și } \|x\|=1\} = \|y_f\|. \end{aligned}$$

Pentru a demonstra cealaltă inegalitate, să observăm că:

$$\left| f \left(\frac{y_f}{\|y_f\|} \right) \right| = \|y_f\|.$$

În particular, rezultă că supremul este atins în punctul $\frac{y_f}{\|y_f\|}$.

14. Definiție

Fie H un spațiu Hilbert. Se numește **bază ortonormală** în H orice submulțime $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ cu proprietățile:

- (i) $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_j^i$, $\forall i, j \in \mathcal{B}$; (am notat cu δ_j^i simbolul lui Kronecker).
- (ii) Subspațiul vectorial generat de \mathcal{B} este dens în H .

Se demonstrează că în orice spațiu Hilbert există cel puțin o bază ortonormală, ([4], p.156; [5], p.75,); de asemenea, orice două baze ortonormale ale aceluiași spațiu Hilbert H au același număr de elemente, numit **dimensiunea** lui H . Spațiile Hilbert care admit baze ortonormale cel mult numărabile ($\text{card}(\mathcal{B}) \leq \aleph_0$), se numesc **separabile**. Cum în această lucrare vom considera numai spații Hilbert separabile, de aici înainte, prin spațiu Hilbert vom înțelege un spațiu Hilbert separabil.

Fie $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o bază ortonormală fixată și fie $x \in H$ un vector arbitrar fixat; **coeficienții Fourier** (în raport cu baza \mathcal{B}), ai lui x sunt, prin definiție, numerele $\hat{x}(n) = \langle x, \varepsilon_n \rangle$. Vom nota cu $\hat{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ **șirul coeficienților Fourier**. Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{x}(n) \varepsilon_n$ se numește **seria Fourier** asociată lui x (în baza \mathcal{B}).

15. Teoremă

În ipotezele și notațiile de mai sus, seria Fourier converge la x și are loc **egalitatea lui Parseval**):

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\hat{x}(n)|^2.$$

Demonstrație Fie u_n șirul sumelor parțiale asociat seriei Fourier; pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, avem:

$$\langle u_n, \varepsilon_k \rangle = \sum_{j=1}^n \hat{x}(j) \langle \varepsilon_j, \varepsilon_k \rangle = \hat{x}(k) = \langle x, \varepsilon_k \rangle,$$

ceea ce arată că $x - u_n \perp \varepsilon_k, \forall k \leq n$. Fie, pentru orice $n \in N$ subspațiul H_n generat de $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$; H_n este subspațiu închis (deoarece este finit dimensional) și $x - u_n \in H_n^\perp$. Fie acum un vector arbitrar $v \in H_n$; conform teoremei lui Pitagora, avem:

$$\|x - v\|^2 = \|x - u_n\|^2 + \|v - u_n\|^2 \geq \|x - u_n\|^2.$$

De aici rezultă că u_n este proiecția vectorului x pe subspațiul H_n , conform consecinței 10. Fie $\epsilon > 0$; deoarece subspațiul liniar generat de \mathcal{B} este dens în H , există $n(\epsilon) \in N$ și un vector $z \in H_{n(\epsilon)}$ astfel încât $\|z - x\| < \epsilon$. Fie $n \geq n(\epsilon)$; aplicând din nou teorema proiecției, rezultă (deoarece $z \in H_n$):

$$\|x - u_n\| \leq \|x - z\| < \epsilon,$$

ceea ce arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$.

Pentru a demonstra egalitatea lui Parseval, să observăm că pentru orice $n \in N$, avem:

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^n \hat{x}(j) \varepsilon_j, \sum_{k=1}^n \hat{x}(k) \varepsilon_k \right\rangle = \\ &= \sum_{j,k=1}^n \hat{x}(j) \overline{\hat{x}(k)} \langle \varepsilon_j, \varepsilon_k \rangle = \sum_{j=1}^n |\hat{x}(j)|^2. \end{aligned}$$

Pentru $n \rightarrow \infty$, se obține egalitatea lui Parseval.

16. Observație

Seria Fourier a vectorului x se mai numește și dezvoltarea (în baza \mathcal{B}) a lui x . Se poate demonstra că această dezvoltare este unică, deci dacă seria $\sum_{n \in N} \alpha_n \varepsilon_n$ converge la x , atunci $\alpha_n = \hat{x}(n)$. De asemenea, un calcul direct arată că pentru orice $x, y \in H$ are loc egalitatea: $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in N} \hat{x}(n) \overline{\hat{y}(n)}$.

Încheiem acest capitol cu exemple de spații Hilbert și noțiuni despre transformarea Fourier.

17. Exemple

(i) Spațiul Banach $(C^n, \|\cdot\|_2)$ este spațiu Hilbert, produsul scalar fiind $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$. Baza canonică a spațiului vectorial C^n este bază ortonormală. Nu este dificil de demonstrat că orice spațiu Hilbert complex (real) de dimensiune n este izomorf cu C^n , (respectiv R^n).

(ii) Spațiul $\ell^2(Z)$

Folosind legea paralelogramului, se demonstrează că dintre spațiile Banach $\ell^p(Z)$ (din exemplul 4(ii)) numai $\ell^2(Z)$ este spațiu Hilbert, produsul scalar fiind

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in Z} x(n) \bar{y}(n).$$

Fie, pentru orice $n \in Z$, șirul $\sigma_n : Z \rightarrow C$, definit prin:

$$\sigma_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } m = n \\ 0 & \text{dacă } m \neq n \end{cases}$$

Atunci mulțimea $(\sigma_n)_{n \in Z}$ este bază ortonormală (numită baza canonică) în $\ell^2(Z)$. Dacă $x \in \ell^2(Z)$, atunci șirul coeficienților săi Fourier este $\hat{x}(n) = x(n)$, $\forall n \in Z$, iar seria sa Fourier este $\sum_{n \in Z} x(n) \sigma_n$. Un subspațiu închis inclus în $\ell^2(Z)$ este

$$h^2(Z) = \{x \in \ell^2(Z); x(n) = 0, \forall n < 0\}.$$

Evident că $\ell^2(N)$ se poate identifica cu acest subspațiu, prelungind șirurile cu 0 pentru $n < 0$. Se poate arăta că orice spațiu Hilbert (separabil) H este izomorf cu un spațiu de tip ℓ^2 . Într-adevăr, dacă $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ este o bază ortonormală a lui H , atunci aplicația

$$H \ni x \rightarrow \hat{x} \in \ell^2(N)$$

este un izomorfism de spații Hilbert: [1], pag. 337. Pentru un rezultat analog pentru spații Hilbert neseparabile se poate consulta [4], p. 161.

(iii) Un rezultat similar cu cel din exemplul anterior este adevărat și pentru spațiile $L^p(\Omega, \mu)$, (din exemplul 2(iii)): $L^p(\Omega, \mu)$ este spațiu Hilbert dacă și numai dacă $p = 2$, produsul scalar fiind definit prin relația $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$.

(iv) Încheiem această listă de exemple cu **suma directă a unei familii numărabile de spații Hilbert**.

Începem cu cazul finit; fie așadar $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ și $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ două spații Hilbert și fie **suma directă** a lor, definită prin:

$$\bigoplus_{i=1}^2 H_i = \{(x_1, x_2); x_i \in H_i\}.$$

Cu operațiile $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ și $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, suma directă este spațiu vectorial; este ușor de arătat că aplicația:

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_1 + \langle x_2, y_2 \rangle_2$$

este produs scalar pe spațiul sumă directă. Norma corespunzătoare este (notațiile sunt evidente):

$$\| (x_1, x_2) \| = \sqrt{\| x_1 \|_1^2 + \| x_2 \|_2^2}.$$

Se demonstrează că $\bigoplus_{i=1}^2 H_i$ este și complet, deci este spațiu Hilbert.

Definiția de mai sus se generalizează fără dificultăți la orice familie finită de spații Hilbert. Fie acum $\mathcal{H} = \{H_n, \langle \cdot, \cdot \rangle_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o familie numărabilă de spații Hilbert; în acest caz, **spațiul sumă directă al familiei** \mathcal{H} se definește prin:

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in H_n \text{ și } \sum_{n \in \mathbb{N}} \| x_n \|_n^2 < \infty\}.$$

Produsul scalar și norma sunt definite prin:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, y_n \rangle_n \text{ și}$$

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} \| x_n \|_n^2},$$

unde, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se demonstrează că spațiul astfel obținut este spațiu Hilbert. Pentru demonstrații și completări, recomandăm [6](I), p.255.

Un caz particular important se obține dacă $H_n = L^2(\Omega_n, \mu_n)$.

Vom studia în continuare spațiul Hilbert al funcțiilor de pătrat integrabil pe cercul unitate.

18. Definiție

Fie \mathcal{S}^1 cercul unitate (considerat cu măsura Lebesgue) și fie $L^2(\mathcal{S}^1)$ spațiul Hilbert al funcțiilor de pătrat integrabil cu produsul scalar:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$$

și norma:

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt}.$$

Vom defini în continuare o bază ortonormală remarcabilă în $L^2(\mathcal{S}^1)$. Fie, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, funcția:

$$\omega_n(e^{it}) = e^{int}$$

și fie mulțimea (numărabilă) $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Are loc următorul rezultat fundamental:

19. Teoremă

Mulțimea $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ este bază ortonormală în spațiul $L^2(\mathcal{S}^1)$.

Pentru demonstrație, recomandăm [8], p.321 sau [4], p.162.

În continuare vom subînțelege că pe spațiul $L^2(\mathcal{S}^1)$ a fost fixată baza ortonormală $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Șirul coeficienților Fourier asociați unei funcții $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ este:

$$\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt,$$

iar seria (de funcții) Fourier corespunzătoare este:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \omega_n.$$

Sumele parțiale ale acestei serii se numesc **polinoame trigonometrice**:

$$S_n(e^{it}) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikt}.$$

Conform teoremei 15, seria de funcții $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \omega_n$ converge în spațiul $L^2(\mathcal{S}^1)$

la funcția f , adică:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_2 = 0.$$

Teorema 15 nu dă informații despre alte tipuri de convergență specifice spațiilor de funcții (convergență punctuală sau convergență uniformă, de

exemplu) care se pot pune în legătură cu seria Fourier. Există în această direcție câteva teoreme clasice: Fejer, Dini, Dirichlet; dintre acestea, reamintim teorema lui Fejer:

20. Teoremă (Fejer)

Fie $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ o funcție continuă și fie S_n șirul sumelor parțiale ale seriei Fourier asociate ei; atunci șirul

$$\varsigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$$

converge uniform pe \mathcal{S}^1 la f .

O consecință directă a acestui rezultat este că orice funcție continuă se poate aproxima uniform (adică în norma $\|\cdot\|_\infty$) cu polinoame trigonometrice.

Tot de aici rezultă că dacă două funcții continue au aceiași coeficienți Fourier, atunci ele sunt egale.

Pentru demonstrație, cât și pentru alte completări asupra acestui subiect, recomandăm [8], p.323 sau [13], p.101.

21. Definiție (transformarea Fourier pe spațiul $L^2(\mathcal{S}^1)$)

Fie $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$; din identitatea lui Parseval rezultă faptul că șirul \hat{f} aparține spațiului $\ell^2(\mathbb{Z})$ și $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Rezultă deci că aplicația:

$$\mathcal{F} : L^2(\mathcal{S}^1) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \mathcal{F}(f) = \hat{f}$$

este izometrie liniară; \mathcal{F} se numește **transformarea Fourier** (între spațiile $L^2(\mathcal{S}^1)$ și $\ell^2(\mathbb{Z})$), iar \hat{f} se numește **transformata Fourier** (sau **Fourier-Plancherel**) a funcției f .

Din teorema 15 și din completitudinea spațiului $L^2(\mathcal{S}^1)$, rezultă că aplicația \mathcal{F} este și surjectivă: pentru orice $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, seria $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \omega_n$ converge în spațiul

$L^2(\mathcal{S}^1)$, deci definește o funcție f (de fapt o clasă de echivalență de funcții egale a.p.t.) care are în mod evident proprietatea $\mathcal{F}(f) = x$, ([8], p.328; [13], p.256). În concluzie, transformarea Fourier \mathcal{F} este un izomorfism de spații Hilbert având ca inversă aplicația

$$\mathcal{F}^{-1} : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathcal{S}^1), \mathcal{F}^{-1}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \omega_n.$$

Menționăm că în egalitatea de mai sus $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \omega_n$ semnifică suma seriei în sensul normei $\|\cdot\|_2$.

Restricția aplicației \mathcal{F}^{-1} la subspațiul $\ell^1(Z) \subset \ell^2(Z)$ admite o formulă punctuală explicită.

22. Teoremă

Dacă $\alpha \in \ell^1(Z)$, atunci:

$$(\mathcal{F}^{-1}\alpha)(e^{it}) = \sum_{n \in Z} \alpha(n)e^{int}, \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1.$$

Demonstrație Deoarece $\alpha \in \ell^1(Z)$, seria $\sum_{n \in Z} \alpha(n)e^{int}$ converge absolut și uniform pe \mathcal{S}^1 :

$$\sum_{n \in Z} |\alpha(n)e^{int}| \leq \sum_{n \in Z} |\alpha(n)| = \|\alpha\|_1, \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1.$$

Fie f suma seriei de mai sus. Atunci f este o funcție continuă și mărginită; în particular, rezultă că $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, deci îi putem calcula coeficienții Fourier:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m \in Z} \alpha(m)e^{imt} \right) e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in Z} \alpha(m) \int_0^{2\pi} e^{it(m-n)} dt = \alpha(n), \forall n \in Z. \end{aligned}$$

Comutarea seriei cu integrala este justificată deoarece amândouă sunt absolut convergente și ca urmare se poate aplica teorema lui Fubini (a se vedea [8], p.256; [19], p.165.). În concluzie, $\mathcal{F}f = \alpha$, deci $\mathcal{F}^{-1}\alpha = f$, (egalitatea este adevărată peste tot, deoarece f este funcție continuă; a se vedea teorema lui Fejer), ceea ce încheie demonstrația.

23. Observație

Conform celor de mai sus, restricția lui \mathcal{F}^{-1} la subspațiul $\ell^1(Z)$ ia valori în mulțimea funcțiilor continue (definite pe cerc). Fie

$$A(\mathcal{S}^1) = \{\mathcal{F}^{-1}x; x \in \ell^1(Z)\}.$$

Se poate demonstra ([15], p.9) că $A(\mathcal{S}^1)$ este o submulțime densă în $\mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$ (în norma $\|\cdot\|_\infty$); cum $\mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$ este la rândul ei densă în $L^2(\mathcal{S}^1)$, (în norma $\|\cdot\|_2$), rezultă că $A(\mathcal{S}^1)$ este o submulțime densă în $L^2(\mathcal{S}^1)$, adică:

$$\forall f \in L^2(\mathcal{S}^1), \forall \epsilon > 0, \exists x \in \ell^1(Z) \text{ astfel încât } \|f - \mathcal{F}^{-1}x\|_2 < \epsilon.$$

24. Observație

Un subspațiu închis, cu proprietăți remarcabile, (definit cu ajutorul transformării Fourier), inclus în $L^2(\mathcal{S}^1)$, este

$$H^2(\mathcal{S}^1) = \{f \in L^2(\mathcal{S}^1); \hat{f}(n) = 0, \forall n < 0\}.$$

Funcțiile din $H^2(\mathcal{S}^1)$ se numesc **funcții analitice de pătrat integrabil**; seria Fourier asociată unei funcții $f \in H^2(\mathcal{S}^1)$ este de forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \lambda^n,$$

unde, am notat $\lambda = e^{it}$.

Dintre rezultatele referitoare la funcțiile din $H^2(\mathcal{S}^1)$, enunțăm următoarea proprietate de prelungire la discul unitate:

Pentru orice $f \in H^2(\mathcal{S}^1)$, există o funcție g cu proprietățile:

(a) g este olomorvă pe discul unitate deschis;

(b) $\lim_{r \rightarrow 1} g(re^{it}) = f(e^{it})$, aproape pentru orice $e^{it} \in \mathcal{S}^1$ (în raport cu măsura Lebesgue pe \mathcal{S}^1);

(c) $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it}) - g(re^{it})|^2 dt = 0$;

(d) g se poate obține din f cu ajutorul formulei lui Cauchy:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}^1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

unde, am notat $z = re^{it}$. Pentru demonstrații, cât și pentru alte rezultate din teoria spațiilor H^p (aici noi am prezentat doar cazul $p = 2$) se pot consulta [13] p.328; [11], p.39.

Capitolul 2

Operatori pe spații finit dimensionale

2.1 Noțiuni de algebră liniară

În acest paragraf vom reaminti unele rezultate de algebră liniară finit dimensională. Sursa bibliografică pe care o vom cita în mod sistematic este [1].

1. Definiție

Fie $C^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_j \in C\}$ spațiul Hilbert complex de dimensiune n , (cf exemplului 17(i), cap.1), cu produsul scalar și norma uzuale:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}.$$

O aplicație (**operator**) $T : C^n \rightarrow C^n$ se numește **liniară** dacă

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall \alpha, \beta \in C, \quad \forall x, y \in C^n.$$

Vom nota cu $\mathcal{L}(C^n)$ **mulțimea operatorilor liniari** pe C^n .

Cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire cu scalari:

$$(T + S)(x) = Tx + Sx, \quad (\alpha T)x = \alpha Tx, \quad \forall \alpha \in C, \forall x \in C^n, \forall T, S \in \mathcal{L}(C^n),$$

mulțimea $\mathcal{L}(C^n)$ este spațiu vectorial; vom nota cu O operatorul nul și cu I aplicația identică.

Produsul (compunerea) a doi operatori $T, S \in \mathcal{L}(C^n)$ este, prin definiție

$$(TS)x = T(Sx), \quad \forall x \in C^n.$$

Evident, operatorul TS este și el liniar. Proprietățile produsului sunt bine-cunoscute: asociativ, distributiv față de adunare și admite ca element neutru operatorul identic I ; el nu este comutativ. Dacă un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este injectiv și surjectiv (deci bijectiv), atunci există și este unic un operator, T^{-1} , de asemenea liniar, (numit **inversul** lui T) astfel încât $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Operatorul T se numește în acest caz **inversabil**. Pentru orice operatori inversabili $T, S \in \mathcal{L}(C^n)$ și $0 \neq \alpha \in C$, se verifică afirmațiile:

(a) $(T^{-1})^{-1} = T$.

(b) $(\alpha T)^{-1} = \alpha^{-1}T^{-1}$.

(c) Produsul TS este inversabil și $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

Oricărui operator liniar T , i se pot asocia două subspații vectoriale remarcabile: **nucleul**, notat $\text{Ker}(T)$, și **imaginea**, notată $\text{Im}(T)$, definite prin:

$$\text{Ker}(T) = \{x \in C^n; Tx = 0\} \text{ și } \text{Im}(T) = \{Tx; x \in C^n\}.$$

Evident, operatorul T este injectiv dacă și numai dacă $\text{Ker}(T) = \{0\}$ și este surjectiv dacă și numai dacă $\text{Im}(T) = C^n$.

O noțiune ce va fi frecvent utilizată în continuare este aceea de **subspațiu invariant** pentru un operator. Un subspațiu $\mathcal{X} \subseteq C^n$ se numește **invariant** pentru operatorul T dacă:

$$\forall x \in \mathcal{X} \Rightarrow Tx \in \mathcal{X}.$$

Nucleul și imaginea unui operator sunt subspații invariante pentru acel operator.

2.Observație

Un rezultat important în legătură cu inversabilitatea operatorilor din $\mathcal{L}(C^n)$ (și care nu este adevărat pentru aplicații liniare de la C^m în C^m , $m \neq n$ și nici pentru aplicații liniare pe un spațiu vectorial infinit dimensional) este următorul:

Pentru orice operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$, următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) T este inversabil.

(b) T este injectiv.

(c) T este surjectiv.

Demonstrația poate fi găsită în [1], pag.42.

3.Definiție

Fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ o bază (nu neapărat ortonormală) în C^n și fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator fixat. Fie, pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$a_{ij} = \langle Tu_j, u_i \rangle .$$

Matricea $M_T^{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{i,j}$ se numește **matricea operatorului** T în baza \mathcal{B} , ([1],p.43). Se verifică prin calcul direct egalitatea:

$$Tu_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Mai general, dacă $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n$ este un vector arbitrar, atunci

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Matriceal, relația de mai sus se scrie $Tx = M_T^{\mathcal{B}}x$, vectorul x fiind aici vector coloană.

În cazul în care \mathcal{B} este baza canonică, vom nota cu M_T matricea lui T în această bază.

Utilitatea asocierii $T \rightarrow M_T^{\mathcal{B}}$ este dată de următoarea teoremă ([1],p.44):

4. Teoremă

Fie \mathcal{M}_n mulțimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente complexe și fie \mathcal{B} o bază fixată în C^n .

(a) Aplicația $\mathcal{L}(C^n) \ni T \rightarrow M_T^{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_n$ este un izomorfism de spații vectoriale și:

$$M_{T+S}^{\mathcal{B}} = M_T^{\mathcal{B}} + M_S^{\mathcal{B}}, \quad M_{\alpha T}^{\mathcal{B}} = \alpha M_T^{\mathcal{B}},$$

pentru orice $\alpha \in C$ și $T, S \in \mathcal{L}(C^n)$.

(b) Aplicația $\mathcal{L}(C^n) \ni T \rightarrow M_T^{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_n$ este un izomorfism de inele și

$$M_{TS}^{\mathcal{B}} = M_T^{\mathcal{B}}M_S^{\mathcal{B}}, \quad \forall T, S \in \mathcal{L}(C^n).$$

În particular, operatorul T este inversabil dacă și numai dacă matricea sa (în orice bază, deoarece \mathcal{B} a fost aleasă arbitrar) este nesingulară:

$$\det M_T^{\mathcal{B}} \neq 0.$$

5. Definiție

Fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ și $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ două baze fixate în C^n . Pentru orice vector $v_j \in \mathcal{V}$ există (și sunt unici) $p_{ij} \in C$ astfel încât:

$$v_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}u_j.$$

Matricea $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j}$ se numește **matricea de trecere** de la baza \mathcal{B} la baza \mathcal{V} . Dacă $S : C^n \rightarrow C^n$ este aplicația liniară definită (pe bază) prin

$$Su_j = v_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

atunci \mathcal{P} este matricea lui S în baza \mathcal{B} :

$$\mathcal{P} = M_S^{\mathcal{B}}.$$

Este ușor de demonstrat că orice matrice de trecere este nesingulară, și, reciproc, orice matrice nesingulară este matricea de trecere între două baze (bine alese).

6.Observație

Fie acum un operator liniar $T \in \mathcal{L}(C^n)$; atunci legătura dintre matricele lui T în bazele \mathcal{B} și \mathcal{V} și matricea de trecere \mathcal{P} între aceste două baze este ([1],p.52):

$$M_T^{\mathcal{V}} = \mathcal{P}^{-1}M_T^{\mathcal{B}}\mathcal{P}.$$

Din faptul că matricea unui operator depinde de alegerea bazei, decurge în mod natural problema găsirii unei baze în care matricea operatorului să aibă o formă cât mai simplă, de exemplu formă diagonală. Această problemă (numită "diagonalizarea operatorilor liniari" pe C^n) constituie subiectul central al acestui capitol. Menționăm că analogul infinit dimensional al diagonalizării (deci pentru operatori definiți pe spații Hilbert infinit dimensionale) este unul din scopurile principale ale acestei lucrări și va fi discutat în cap.5

7.Definiție

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$.

(a) T se numește **operator diagonal** dacă matricea sa în baza canonică (a lui C^n) este matrice diagonală.

(b) Spunem că T este **diagonalizabil în sens algebric** dacă există o bază a lui C^n în care matricea lui T să fie matrice diagonală.

(c) Spunem că T este **diagonalizabil în sens geometric** dacă există o bază ortonormală a lui C^n în care matricea lui T să fie matrice diagonală.

Evident, avem implicațiile:

$$(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b).$$

În acest paragraf vom reaminti (fără demonstrații) principalele rezultate cu privire la operatorii diagonalizabili în sens algebric, iar în ultimul paragraf al acestui capitol vom studia (și caracteriza) operatorii diagonalizabili în sens geometric.

Pentru diagonalizarea în sens algebric recomandăm [1],p.75-90, unde sunt prezentate demonstrațiile complete ale rezultatelor ce urmează.

Instrumentele esențiale pentru studiul diagonalizării sunt **polinomul caracteristic, vectorii și valorile proprii**.

8. Teorema Hamilton-Cayley

Fie $A \in \mathcal{M}_n$ și fie I_n matricea unitate de ordinul n . **Polinomul caracteristic al matricei A** , este, prin definiție,

$$P_A(z) = \det(zI_n - A).$$

Evident, P_A este un polinom de gradul n cu coeficienți complecși (și de variabilă complexă z).

Dacă A și B sunt două matrice pentru care există o matrice nesingulară \mathcal{P} astfel încât $B = \mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P}$, atunci se demonstrează că polinoamele lor caracteristice sunt egale: $P_A = P_B$. În particular, această proprietate se poate aplica în cazul în care matricele A și B sunt matricele (în două baze diferite) ale aceluiași operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$. Rezultă deci că putem defini **polinomul caracteristic al operatorului $T \in \mathcal{L}(C^n)$** prin egalitatea:

$$P_T(z) = \det(zI_n - M_T^{\mathcal{B}}),$$

baza \mathcal{B} fiind arbitrară.

Fie acum un polinom arbitrar, $f(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$; prin definiție, polinomul de matricea A definit de f , este matricea:

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Teorema Hamilton-Cayley ([1],p.76) afirmă că

$$P_A(A) = O_n,$$

unde, O_n este matricea nulă de ordinul n .

9. Valori proprii și vectori proprii

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$. **Spectrul operatorului T** este, prin definiție, mulțimea ([1],p.79):

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C ; \text{operatorul } \lambda I - T \text{ nu este inversabil}\}.$$

Mulțimea **valorilor proprii** ale operatorului T (sau **spectrul punctual**) este, prin definiție:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in C ; \text{operatorul } T \text{ nu este injectiv}\}.$$

Incluziunea $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$ este evidentă. Dar, deoarece pe spații finit dimensionale un operator liniar este inversabil dacă și numai dacă este injectiv,

rezultă că avem egalitatea $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. În concluzie, un număr λ este în spectru dacă și numai dacă λ este valoare proprie. Din această cauză, spectrul unui operator pe C^n se mai numește și mulțimea valorilor proprii. Vom vedea că pe spații infinite dimensionale această proprietate nu mai este adevărată, spectrul punctual fiind, în general, o submulțime strictă a spectrului; există chiar exemple de operatori care nu au valori proprii, dar al căror spectru este nevid (a se vedea, de exemplu, operatorii de translație din cap.5).

Este acum evident că spectrul operatorului T este format din rădăcinile polinomului caracteristic asociat lui T :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C ; P_T(\lambda) = 0\}.$$

În particular, rezultă că spectrul unui operator pe C^n este o mulțime nevidă și finită.

De asemenea, $\lambda \in \sigma(T)$ dacă și numai dacă există $x \in C^n$, $x \neq 0$, astfel încât $Tx = \lambda x$. Un astfel de vector x se numește **vector propriu** asociat valorii proprii λ . Mulțimea vectorilor proprii asociați unei valori proprii fixate, λ , (la care adăugăm și vectorul nul), este, în mod evident egală cu subspațiul $\text{Ker}(\lambda I - T)$.

Subspațiile de vectori proprii au proprietățile:

(a) Sunt subspații invariante pentru operatorul T , deci:

$$\forall x \in \text{Ker}(\lambda I - T) \Rightarrow Tx \in \text{Ker}(\lambda I - T).$$

(b) Dacă λ și μ sunt două valori proprii distincte ale lui T , atunci:

$$\text{Ker}(\lambda I - T) \cap \text{Ker}(\mu I - T) = \{0\}.$$

Fie $\lambda \in \sigma(T)$. Multiplicitatea lui λ ca rădăcină a polinomului caracteristic P_T se numește dimensiunea (multiplicitatea) algebrică a lui λ și o vom nota $n(\lambda)$. Evident, suma dimensiunilor algebrice ale tuturor valorilor proprii este egală cu n . Dimensiunea (multiplicitatea) geometrică a valorii proprii λ (notată $r(\lambda)$) este, prin definiție, egală cu dimensiunea subspațiului $\text{Ker}(\lambda I - T)$. În general, are loc inegalitatea:

$$r(\lambda) \leq n(\lambda), \forall \lambda \in \sigma(T).$$

Încheiem acest paragraf recapitulativ cu rezultatul principal în legătură cu diagonalizarea în sens algebric a operatorilor liniari pe C^n .

10. Teoremă (Criteriul de diagonalizare algebrică, [1], p.85)

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$; următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) T este diagonalizabil în sens algebric.
 (b) Există o bază $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a lui C^n formată din vectori proprii ai operatorului T .
 (c) $r(\lambda) = n(\lambda), \forall \lambda \in \sigma(T)$.
 (d) $\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} \ker(\lambda I - T) = C^n$.

În ipoteza că T este diagonalizabil în sens algebric, matricea sa în baza \mathcal{B} are pe diagonală valorile proprii ale lui T , iar matricea de trecere \mathcal{P} de la baza canonică la baza \mathcal{B} are drept coloane vectorii proprii din baza \mathcal{B} . În concluzie, dacă $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, (fiecare valoare proprie fiind repetată de un număr egal cu dimensiunea sa algebrică), atunci:

$$M_T^{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \mathcal{P}^{-1} M_T \mathcal{P}.$$

2.2 Norma unui operator; continuitate

11. Definiție

Un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ se numește **continuu în punctul** $x_o \in C^n$ dacă, prin definiție, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in C^n$ cu proprietatea $\|x - x_o\| < \delta$, să rezulte $\|Tx - Tx_o\| < \epsilon$. O formulare echivalentă (cu șiruri) a acestei definiții este: pentru orice șir $(x_m)_m \subset C^n$ cu proprietatea $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_o$, să rezulte $\lim_{m \rightarrow \infty} Tx_m = Tx_o$.

Operatorul T se numește **continuu** dacă este continuu în orice punct.

Pentru aplicațiile liniare are loc următorul criteriu de continuitate.

12. Propoziție

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ și $x_o \in C^n$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) T este continuu în x_o .
 (b) T este continuu.
 (c) Există $M > 0$ astfel încât $\|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in C^n$.

În primul paragraf al capitolului următor, (propoziția 3, cap. 3) vom da o demonstrație a acestei propoziții într-o situație mai generală, înlocuind spațiul C^n cu un spațiu normat arbitrar.

De altfel, așa cum vom mai vedea, și alte rezultate din acest capitol sunt adevărate în condiții mai generale (de obicei "mai general" însemnând dimensiune infinită). În unele cazuri, demonstrația pe C^n se poate adapta fără probleme la spații infinite dimensionale (cum este cazul propoziției de mai sus), altele raționamentele diferă complet.

Un rezultat remarcabil, adevărat numai în cazul finit dimensional, este următorul.

13. Teoremă

Orice operator liniar $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este continuu.

Demonstrație Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ și fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza canonică a lui C^n . Fie $K = \max\{\|Te_1\|, \|Te_2\|, \dots, \|Te_n\|\}$; fie $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ un vector din C^n . În mod evident avem:

$$|x_j| \leq \|x\|, \forall 1 \leq j \leq n.$$

Folosind inegalitatea triunghiului și inegalitățile anterioare, rezultă:

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| T \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j T e_j \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|T e_j\| \leq nK \|x\|. \end{aligned}$$

Din propoziția precedentă, ((b) \Leftrightarrow (c)), rezultă că T este aplicație continuă.

14. Definiție (norma unui operator)

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$. Datorită punctului (c) din propoziția 12 putem defini:

$$\|T\| = \inf\{M > 0; \|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in C^n\}.$$

Fie, de asemenea (notațiile care urmează nu vor mai fi folosite în continuare):

$$\|T\|_1 = \sup\{\|Tx\|; x \in C^n \text{ și } \|x\| = 1\},$$

$$\|T\|_2 = \sup\{\|Tx\|; x \in C^n \text{ și } \|x\| \leq 1\},$$

$$\|T\|_3 = \sup\{|\langle Tx, y \rangle|; \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

În lema 5, cap.3, vom demonstra (înlocuind C^n cu un spațiu normat arbitrar) că $\|T\| = \|T\|_1 = \|T\|_2$; tot acolo, vom demonstra că aplicația $\|\cdot\|$ este o normă pe spațiul $\mathcal{L}(C^n)$. Propunem ca exercițiu egalitatea $\|T\|_3 = \|T\|$. Rezultă deci că $(\mathcal{L}(C^n), \|\cdot\|)$ este un spațiu normat. Completitudinea acestui spațiu va fi demonstrată în capitolul 3 (teorema 7), în condiții mai generale (înlocuind spațiul Banach C^n cu un spațiu Banach arbitrar). În concluzie, spațiul operatorilor liniari (și continui) pe C^n este un spațiu Banach.

2.3 Diagonalizarea operatorilor normali

În acest paragraf vom caracteriza operatorii care sunt diagonalizabili în sens geometric (cf. definiției 7).

15.Lemă (adjunctul unui operator)

Pentru orice $T \in \mathcal{L}(C^n)$, există un unic operator, $T^* \in \mathcal{L}(C^n)$ astfel încât:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \forall x, y \in C^n.$$

Operatorul T^* se numește **adjunctul** lui T . Demonstrația se bazează în mod esențial pe teorema lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe un spațiu Hilbert (teorema 13, cap.1); în capitolul 5, paragraful 1 vom face demonstrația pentru un spațiu Hilbert arbitrar.

Alte proprietăți remarcabile ale adjunctului sunt (propozițiile 1 și 2, cap.5 sau [1], p.125):

(i) $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*, \forall \alpha, \beta \in C, T, S \in \mathcal{L}(C^n)$.

(ii) $(T^*)^* = T, \forall T \in \mathcal{L}(C^n)$.

(iii) $(TS)^* = S^*T^*, \forall T, S \in \mathcal{L}(C^n)$.

(iv) $\|T^*T\| = \|T\|^2, \forall T \in \mathcal{L}(C^n)$.

(v) $\|T^*\| = \|T\|, \forall T \in \mathcal{L}(C^n)$.

(vi) Dacă $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este inversabil, atunci $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

16.Propoziție

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ și fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ o bază ortonormală în C^n . Dacă $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{ij}$ este matricea lui T în baza \mathcal{B} , atunci $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (\bar{a}_{ji})_{ij}$.

În particular, dacă elementele a_{ij} sunt reale, atunci matricea lui T^* este transpusa matricei lui T .

Demonstrație Fie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (b_{ij})_{ij}$; conform definiției 3, avem:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \langle T^*u_j, u_i \rangle = \langle u_j, Tu_i \rangle = \\ &= \overline{\langle Tu_i, u_j \rangle} = \bar{a}_{ji}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația.

Cu ajutorul noțiunii de adjunct, putem defini câteva clase remarcabile de operatori:

17.Definiție

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$.

(a) T se numește **autoadjunct** dacă $T = T^*$.

(b) T se numește **unitar** dacă $TT^* = T^*T = I$.

Este ușor de observat (deoarece C^n are dimensiune finită), că în definiția dată mai sus este suficientă doar condiția $T^*T = I$ (de exemplu), cealaltă fiind o consecință. Pe spații Hilbert infinit dimensionale amândouă condițiile sunt necesare.

(c) T se numește **pozitiv** (și vom nota $T \geq O$) dacă

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0, \forall x \in C^n.$$

Așa cum vom vedea, pe C^n (ca și pe orice spațiu Hilbert complex), orice operator pozitiv este autoadjunct. În cazul unui spațiu Hilbert real definiția de mai sus nu mai implică $T = T^*$; de aceea, în cazul R^n în definiția operatorului pozitiv se cere și condiția de a fi autoadjunct.

(d) T se numește **normal** dacă $TT^* = T^*T$.

Există o analogie între operatori liniari și numere complexe în care operatorii autoadjuncți corespund numerelor reale, operatorii unitari corespund numerelor complexe de modul 1, iar operatorii pozitivi corespund numerelor pozitive. De exemplu, orice operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ se poate scrie în mod unic sub forma $T = A + iB$, cu A și B operatori autoadjuncți, această descompunere fiind analogul descompunerii (Carteziene) a unui număr complex $z = a + ib$, cu $a, b \in R$; într-adevăr, dacă $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ și $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$, atunci A și B sunt autoadjuncți și $A + iB = T$.

$$T \in \mathcal{L}(C^n) \leftrightarrow z \in C.$$

$$A = A^* \leftrightarrow z = \bar{z} \in R.$$

$$U^*U = I \leftrightarrow z\bar{z} = |z|^2 = 1.$$

Menționăm că, așa cum vom vedea în continuare, există și alte rezultate care întăresc această analogie, inclusiv în cazul infinit dimensional (a se vedea cap.5).

Revenim acum la problema diagonalizării în sens geometric, care constituie subiectul central al acestui paragraf; rezultatul fundamental (pe care îl vom demonstra în teorema 28) este:

$$T \text{ este diagonalizabil în sens geometric} \Leftrightarrow T \text{ este normal.}$$

Primul rezultat se referă la operatorii unitari.

18. Teoremă

Fie $U \in \mathcal{L}(C^n)$; următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) U este operator unitar.

(b) U este inversabil și U^{-1} este unitar.

(c) $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in C^n$.

(d) U transformă orice bază ortonormală în bază ortonormală.

Demonstrație (a) \Rightarrow (b) Dacă U este unitar, atunci, din definiție, U este inversabil și $U^{-1} = U^*$; operatorul U^{-1} este unitar deoarece:

$$(U^{-1})^* U^{-1} = (U^*)^{-1} U^{-1} = (UU^*)^{-1} = I.$$

(b) \Rightarrow (c) Pentru orice $x, y \in C^n$, avem:

$$\langle x, y \rangle = \langle U^{-1}Ux, U^{-1}Uy \rangle = \langle Ux, (U^{-1})^* Uy \rangle = \langle Ux, Uy \rangle.$$

(c) \Rightarrow (d) Fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ o bază ortonormală, deci

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_i^j, \text{ (simbolul lui Kronecker).}$$

Mulțimea $\{Uu_1, Uu_2, \dots, Uu_n\}$ este bază ortonormală deoarece:

$$\langle Uu_i, Uu_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_i^j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

(d) \Rightarrow (c) Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza canonică și fie

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ și } y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Deoarece, conform ipotezei, $\{Ue_1, Ue_2, \dots, Ue_n\}$ este tot bază ortonormală, avem:

$$\begin{aligned} \langle Ux, Uy \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i Ue_i, \sum_{j=1}^n y_j Ue_j \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle Ue_i, Ue_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

(c) \Rightarrow (a) Propunem mai întâi ca exercițiu următoarea afirmație: doi operatori $T, S \in \mathcal{L}(C^n)$ sunt egali dacă și numai dacă

$$\langle Tx, y \rangle = \langle Sx, y \rangle, \forall x, y \in C^n.$$

Pentru orice $x, y \in C^n$, avem:

$$\langle U^*Ux, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle,$$

și deci $U^*U = I$.

19. Observație

Punctul (d) din teorema de mai sus arată că matricele operatorilor unitari sunt exact matricele de trecere între două baze ortonormale. Mai mult, matricea (într-o bază ortonormală) a unui operator unitar are drept coloane vectori ortonormali; o astfel de matrice se numește matrice ortogonală.

Din egalitatea (c) din teorema 18 rezultă $\|Ux\| = \|x\|$, $\forall x \in C^n$, deci operatorii unitari sunt izometrii liniare; pe spațiul C^n se poate demonstra și reciproca: orice izometrie liniară este operator unitar. Într-adevăr, dacă

$$\|Ux\| = \|x\|, \forall x \in C^n,$$

atunci $\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle$, $\forall x \in C^n$ și deci

$$\langle U^*Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle, \forall x \in C^n.$$

Demonstrația se încheie dacă folosim următorul rezultat adevărat numai pe spații Hilbert complexe (demonstrația, care este elementară, se găsește în capitolul 5, propoziția 9):

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator arbitrar; dacă $\langle Tx, x \rangle = 0$, $\forall x \in C^n$, atunci $T = O$.

Vom vedea (în capitolul 5) că pe spații Hilbert infinit dimensionale există izometrii liniare neinversabile.

Utilitatea operatorilor unitari pentru problema diagonalizării în sens geometric este conținută în următoarea teoremă.

20. Teoremă

(a) Un operator $D \in \mathcal{L}(C^n)$ este operator diagonal dacă și numai dacă vectorii bazei canonice sunt vectori proprii pentru D .

(b) Un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este operator diagonalizabil în sens geometric dacă și numai dacă există o bază ortonormală a lui C^n formată din vectori proprii ai lui T , sau, echivalent, există un operator unitar U astfel încât operatorul $D = U^{-1}TU$ să fie operator diagonal.

Demonstrație (a) Dacă $D \in \mathcal{L}(C^n)$ este un operator diagonal, atunci, prin definiție, matricea sa în baza canonică este:

$$M_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui D . Dacă $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este baza canonică, atunci evident $De_i = \lambda_i e_i$ și deci e_i este vector propriu asociat valorii proprii λ_i .

Reciproc, dacă $De_i = \lambda_i e_i$, atunci elementele matricii lui D (în baza canonică), sunt:

$$a_{ij} = \langle De_j, e_i \rangle = \begin{cases} \lambda_i & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

(b) Dacă T este un operator diagonalizabil în sens geometric, atunci, din definiție, există o bază ortonormală $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ astfel încât

$$M_T^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Fie D operatorul (diagonal) a cărui matrice în baza canonică este $M_T^{\mathcal{B}}$. Dacă U este operatorul definit de relațiile

$$Ue_i = u_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

atunci U este operator unitar (conform teoremei 18(d)) și $D = U^{-1}TU$. Conform celor demonstrate la punctul (a), rezultă că

$$De_i = \lambda_i e_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Rezultă deci $TUe_i = \lambda_i Ue_i$, adică

$$Tu_i = \lambda_i u_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

deci u_1, u_2, \dots, u_n sunt vectori proprii ai lui T .

Reciproc, fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ o bază ortonormală formată din vectori proprii ai operatorului $T \in \mathcal{L}(C^n)$, deci

$$Tu_i = \lambda_i u_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Fie U operatorul definit prin $Ue_i = u_i, \forall i$. Atunci U este operator unitar (cf. teoremei 18(d)); rezultă că operatorul $U^{-1}TU$ este operator diagonal deoarece vectorii bazei canonice sunt vectori proprii:

$$U^{-1}TUe_i = U^{-1}Tu_i = U^{-1}(\lambda_i u_i) = \lambda_i U^{-1}u_i = \lambda_i e_i, \forall i.$$

Rezultă deci că matricea lui T în baza \mathcal{B} este diagonală, deci T este operator diagonalizabil în sens geometric.

Trecem acum la studiul operatorilor normali; înainte de a demonstra teorema de diagonalizare (în sens geometric) pentru această clasă de operatori,

vom prezenta mai întâi câteva proprietăți uzuale ale acestora.
Reamintim că un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ se numește normal dacă el comută cu adjunctul său: $TT^* = T^*T$.

21. Propoziție

Dacă $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este operator normal, atunci

$$\|Tx\| = \|T^*x\|, \forall x \in C^n.$$

Menționăm că reciproca acestei afirmații este și ea adevărată; mai mult, rezultatul este adevărat și în cazul infinit dimensional (a se vedea cap.5, teorema 52).

Demonstrație Pentru orice $x \in C^n$, avem:

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \\ &= \langle x, TT^*x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle = \|T^*x\|^2. \end{aligned}$$

22. Consecință

Dacă $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este operator normal, atunci $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^*)$.
Folosind propoziția precedentă, demonstrația este evidentă:

$$\|Tx\| = 0 \Leftrightarrow \|T^*x\| = 0.$$

23. Propoziție

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal. Atunci, pentru orice $\lambda \in C$ și $x \in C^n$, avem:

$$Tx = \lambda x \Leftrightarrow T^*x = \bar{\lambda}x.$$

Deci, dacă λ este valoare proprie pentru T , iar x este un vector propriu (al lui T) corespunzător valorii proprii λ , atunci, $\bar{\lambda}$ este valoare proprie pentru T^* , iar x este vector propriu (al lui T^*) corespunzător valorii proprii $\bar{\lambda}$.

Demonstrație Fie $\lambda \in \sigma(T)$; atunci, pentru orice $x \in C^n$, avem:

$$Tx = \lambda x \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(\lambda I - T),$$

și deci este suficient să demonstrăm egalitatea:

$$\text{Ker}(\lambda I - T) = \text{Ker}(\bar{\lambda}I - T^*).$$

Se verifică direct că operatorul $\lambda I - T$ este normal, iar adjunctul său este $\bar{\lambda}I - T^*$; aplicând acum consecința 22 operatorului (normal) $\lambda I - T$, demonstrația se încheie.

24. Propoziție

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal și fie $\lambda \neq \mu$ două valori proprii distincte ale sale. Dacă $Tx = \lambda x$ și $Ty = \mu y$, atunci $x \perp y$.

Demonstrație Fie T, λ, μ, x, y ca în enunț; atunci, conform propoziției precedente $T^*y = \bar{\mu}y$ și deci:

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \bar{\mu}y \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle.$$

Deoarece $\lambda - \bar{\mu} \neq 0$, rezultă $\langle x, y \rangle = 0$, adică $x \perp y$.

25. Observație

Din algebra liniară se știe că pentru un operator liniar arbitrar, vectorii proprii corespunzători unor valori proprii distincte sunt liniari independenți; propoziția anterioară afirmă că pentru operatorii normali, aceștia sunt perpendiculari. O formulare echivalentă este: pentru orice $\lambda, \mu \in \sigma(T)$, $\lambda \neq \mu$, avem $\text{Ker}(\lambda I - T) \perp \text{Ker}(\mu I - T)$.

Pentru a putea demonstra teorema de diagonalizare pentru operatorii normali, mai sunt necesare două rezultate cu caracter general.

26. Lemă

Fie $A, B \in \mathcal{L}(C^n)$. Dacă $AB = BA$, atunci A și B au (cel puțin) un vector propriu comun.

Demonstrație Fie $\lambda \in \sigma(A)$ și fie $x \neq 0$ un vector propriu corespunzător: $Ax = \lambda x$.

Din egalitatea $AB = BA$ rezultă prin inducție $AB^k = B^kA$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Aplicând egalității $Ax = \lambda x$ operatorul B , obținem: $BAx = \lambda Bx$, adică $ABx = \lambda Bx$; în concluzie, vectorul Bx este și el vector propriu pentru operatorul A (corespunzător tot valorii proprii λ). Analog, aplicând în continuare B^2, B^3, \dots , rezultă

$$AB^k x = \lambda B^k x, \forall k \in \mathbb{N},$$

și deci toți vectorii $B^k x$, $k \in \mathbb{N}$, sunt vectori proprii ai operatorului A , corespunzători valorii proprii λ . Deoarece dimensiunea lui C^n este finită, rezultă că numai un număr finit dintre aceștia sunt liniari independenți; fie

$$\{x, Bx, B^2x, \dots, B^{p-1}x\}$$

primii p vectori liniari independenți și fie \mathcal{X} subspațiul liniar generat de ei. Proprietățile subspațiului \mathcal{X} sunt:

(i) $\dim(\mathcal{X}) = p$.

(ii) $\forall y \in \mathcal{X}$ este vector propriu pentru operatorul A .

(iii) \mathcal{X} este subspațiu invariant pentru operatorul B , adică $B(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$. Proprietatea (i) este evidentă; pentru a demonstra (ii) este suficient să observăm că, în general, orice combinație liniară de vectori proprii (corespunzători toți aceleleași valori proprii) este în continuare vector propriu. Demonstrăm acum (iii); pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că pentru orice vector (din bază) $B^q x \in \mathcal{X}$ rezultă $B(B^q x) \in \mathcal{X}$. Dar $B^{q+1}x \in \{x, Bx, B^2x, \dots\}$ și deci conform alegerii lui p rezultă că $B^{q+1}x$ este o combinație liniară a vectorilor $\{x, Bx, \dots, B^{p-1}x\}$, adică $B^{q+1}x \in \mathcal{X}$. Fie $B|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ restricția operatorului B la subspațiul \mathcal{X} ; operatorul $B|_{\mathcal{X}}$ are cel puțin o valoare proprie (deoarece $\dim(\mathcal{X}) \geq 1$) și deci există cel puțin un vector propriu $y \in \mathcal{X}$ al operatorului B . Deoarece toți vectorii din \mathcal{X} sunt vectori proprii pentru A , rezultă că y este un vector propriu comun operatorilor A și B .

27.Lemă

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ și fie \mathcal{X} un subspațiu invariant pentru T . Atunci subspațiul ortogonal, \mathcal{X}^\perp , este invariant pentru operatorul T^* .

Demonstrație Pentru orice $y \in \mathcal{X}^\perp$ și $x \in \mathcal{X}$, deoarece $Tx \in \mathcal{X}$, avem:

$$\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = 0.$$

Rezultă deci că $T^*y \perp x, \forall x \in \mathcal{X}$, adică $T^*y \in \mathcal{X}^\perp$.

Evident, are loc și implicația reciprocă: dacă \mathcal{X}^\perp este invariant la T^* , atunci \mathcal{X} este invariant la T .

Demonstrăm în continuare principalul rezultat al acestui paragraf.

28.Teorema de diagonalizare pentru operatori normali

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$; următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) T este operator normal.

(ii) T este operator diagonalizabil în sens geometric.

Demonstrație Vom începe cu implicația mai ușoară: (ii) \Rightarrow (i). Dacă T este operator diagonalizabil în sens geometric, atunci, conform teoremei 20 (b), există un operator unitar $U \in \mathcal{L}(C^n)$ astfel încât operatorul $D = U^*TU$ să fie operator diagonal. Deoarece $DD^* = D^*D$ (egalitate evidentă), rezultă:

$$\begin{aligned} TT^* &= U^*DU (U^*DU)^* = U^*DUU^*D^*U = U^*DD^*U = \\ &= U^*D^*DU = U^*D^*UU^*DU = (U^*DU)^*U^*DU = T^*T, \end{aligned}$$

și deci T este operator normal.

Demonstrăm acum implicația (i) \Rightarrow (ii). Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal,

deci $TT^* = T^*T$. Pentru a demonstra că T este diagonalizabil în sens geometric este suficient, conform teoremei 20(b), să construim o bază ortonormală a lui C^n formată din vectori proprii ai operatorului T . Deoarece operatorii T și T^* comută, din lema 26 rezultă că există $u_1 \in C^n$ un vector propriu comun pentru T și T^* . Fie \mathcal{X}_1 subspațiul linear generat de u_1 și fie \mathcal{X}_1^\perp ortogonalul său. Proprietățile subspațiilor \mathcal{X}_1 și \mathcal{X}_1^\perp sunt:

- (i) $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_1^\perp = C^n$.
- (ii) $\dim \mathcal{X}_1 = 1$ și $\dim \mathcal{X}_1^\perp = n - 1$.
- (iii) \mathcal{X}_1 și \mathcal{X}_1^\perp sunt invariante la T și T^* .

Primele două proprietăți sunt evidente. Subspațiul \mathcal{X}_1 este invariant și la T și la T^* deoarece u_1 este vector propriu atât pentru T cât și pentru T^* . Conform lemei 27, rezultă că subspațiul \mathcal{X}_1^\perp este și el invariant pentru operatorii T și T^* . Considerăm restricțiile operatorilor T și T^* la subspațiul \mathcal{X}_1^\perp :

$$T|_{\mathcal{X}_1^\perp} : \mathcal{X}_1^\perp \rightarrow \mathcal{X}_1^\perp,$$

$$T^*|_{\mathcal{X}_1^\perp} : \mathcal{X}_1^\perp \rightarrow \mathcal{X}_1^\perp.$$

Aplicând acum lema 26 operatorilor $T|_{\mathcal{X}_1^\perp}$ și $T^*|_{\mathcal{X}_1^\perp}$, (care comută între ei), rezultă că există $u_2 \in \mathcal{X}_1^\perp$ care este vector propriu comun operatorilor T și T^* . Fie \mathcal{X}_2 subspațiul linear generat de vectorii u_1 și u_2 și fie \mathcal{X}_2^\perp ortogonalul său. Deoarece vectorii u_1 și u_2 sunt perpendiculari

(din construcție), rezultă că dimensiunea spațiului \mathcal{X}_2 este 2; cu un raționament analog celui de mai sus, se demonstrează că subspațiile \mathcal{X}_2 și \mathcal{X}_2^\perp sunt invariante la T și T^* . Repetând acum construcția anterioară (considerăm restricțiile operatorilor T și T^* la subspațiile \mathcal{X}_2 și \mathcal{X}_2^\perp , etc), obținem o mulțime $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ cu proprietățile:

- (i) $u_i \perp u_j, \forall i \neq j$.
- (ii) u_i este vector propriu pentru operatorii T și T^* , $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Considerând acum

$$v_i = \|u_i\|^{-1} u_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

rezultă că mulțimea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormală a lui C^n formată din vectori proprii ai operatorului T (și ai lui T^*), ceea ce încheie demonstrația.

Înainte de a enunța o primă consecință importantă a teoremei de mai sus, introducem o nouă clasă de operatori liniari.

29. Definiție

Fie \mathcal{X} un subspațiu în C^n . Atunci, conform teoremei proiecției pe un subspațiu

închis (consecința 10,cap.1), orice $x \in C^n$ admite o descompunere unică $x = y + z$ cu $y \in \mathcal{X}$ și $z \in \mathcal{X}^\perp$. Considerăm operatorul (liniar)

$$P_{\mathcal{X}} : C^n \rightarrow C^n, P_{\mathcal{X}}x = y.$$

Operatorul $P_{\mathcal{X}}$ se numește **proiecția** pe subspațiul \mathcal{X} . Este evident că $P_{\mathcal{X}}^2 = P_{\mathcal{X}}$; se demonstrează de asemenea fără dificultate că $P_{\mathcal{X}}$ este autoadjunct. Un studiu aprofundat al operatorilor de proiecție (pe un spațiu Hilbert arbitrar) va fi prezentat în capitolul 5, paragraful 2. În cele ce urmează vom folosi următoarele proprietăți (demonstrațiile sunt imediate). Dacă $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$, atunci:

(i) $P_{\mathcal{X}}P_{\mathcal{Y}} = P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}} = O$.

(ii) Operatorul sumă $P_{\mathcal{X}} + P_{\mathcal{Y}}$ este de asemenea proiecție, subspațiul de proiecție corespunzător fiind suma (directă) a subspațiilor \mathcal{X} și \mathcal{Y} .

30. Consecință (formula de descompunere spectrală pentru operatori normali)

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal și fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ valorile sale proprii (distincte). Fie, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, P_i operatorul de proiecție pe subspațiul vectorilor proprii asociați valorii proprii λ_i . Atunci:

(i) $P_iP_j = O, \forall i \neq j$.

(ii) $P_1 + P_2 + \dots + P_m = I$.

(iii) $T = \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 + \dots + \lambda_mP_m$.

Formula (iii) se numește **descompunerea spectrală** a lui T ; în plus, această descompunere este unică.

Demonstrație Prima relație este adevărată deoarece, conform propoziției 24, pentru un operator normal vectorii proprii corespunzători unor valori proprii distincte sunt ortogonali. Din teorema 28, rezultă că există o bază a lui C^n formată din vectori proprii ai operatorului T și deci suma (directă) a tuturor subspațiilor de vectori proprii este C^n ; acest fapt justifică egalitatea (ii). Pentru a demonstra formula de descompunere spectrală, fie, (ca în teorema 28(a)), $T = UDU^{-1}$, unde U este operator unitar, iar D este operator diagonal (matricea sa în baza canonică are pe diagonala principală valorile proprii ale lui T). Este evident că $D = \lambda_1E_1 + \lambda_2E_2 + \dots + \lambda_mE_m$, unde, E_i este proiecția pe subspațiul vectorilor proprii ai lui D asociați valorii proprii λ_i ; reamintim că, în baza teoremei 20(a), vectorii din baza canonică sunt vectori proprii pentru D . Demonstrația se încheie observând că

$$P_i = UE_iU^{-1}.$$

Lăsăm demonstrația unicității ca exercițiu.

Din demonstrație rezultă de asemenea și formula de descompunere spectrală

a adjunctului:

$$T^* = \sum_{i=1}^m \overline{\lambda_i} P_i.$$

31. Observație

Deoarece operatorii autoadjuncți și operatorii unitari sunt în mod evident operatori normali, din teorema 28 rezultă că acești operatori sunt diagonalizabili în sens geometric; propunem cititorului să găsească o demonstrație directă pentru teorema de diagonalizare a operatorilor autoadjuncți.

În finalul acestui capitol vom da câteva aplicații remarcabile ale teoremelor 28 și 30; pentru completări, recomandăm [9].

32. Observație

Se demonstrează fără dificultate următoarele implicații:

- (i) Dacă T este operator autoadjunct, atunci valorile sale proprii sunt numere reale.
- (ii) Dacă T este operator pozitiv, atunci valorile sale proprii sunt numere pozitive.
- (iii) Dacă T este proiector, atunci $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$.
- (iv) Dacă T este operator unitar, atunci valorile sale proprii sunt numere complexe de modul 1.

Este remarcabil faptul că pentru operatorii normali sunt adevărate și reciproccele acestor afirmații.

33. Teoremă

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal; atunci:

- (i) T este operator autoadjunct dacă și numai dacă valorile sale proprii sunt numere reale.
- (ii) T este operator pozitiv dacă și numai dacă valorile sale proprii sunt numere pozitive.
- (iii) T este proiector dacă și numai dacă $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$.
- (iv) T este operator unitar dacă și numai dacă valorile sale proprii sunt numere complexe de modul 1.

Menționăm că există operatori (dar nu normali) care au toate valorile proprii reale, dar nu sunt autoadjuncți, etc.

Demonstrație Vom demonstra numai implicațiile " \Leftarrow ".

Fie, conform teoremei 30,

$$T = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i \text{ și } T^* = \sum_{i=1}^m \overline{\lambda_i} P_i,$$

descompunerile spectrale ale operatorilor (normali) T și T^* .

(i) Este clar că dacă λ_i sunt numere reale, atunci T este autoadjunct.

(ii) Dacă $\lambda_i \geq 0$, atunci pentru orice $x \in C^n$, avem:

$$\begin{aligned} \langle Tx, x \rangle &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle P_i x, x \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle P_i^2 x, x \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle P_i x, P_i x \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|P_i x\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

deci T este operator pozitiv.

(iii) Dacă $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$, atunci operatorul T este suma unor proiecții pe subspații ortogonale, deci este el însuși o proiecție.

(iv) Dacă $|\lambda_i| = 1, \forall i$, atunci:

$$TT^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j P_i P_j = \sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2 P_i^2 = \sum_{i=1}^m P_i = I,$$

ceea ce arată că T este operator unitar.

34. Definiție (calcul funcțional polinomial)

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ și fie $p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$ un polinom cu coeficienți complecși. O definiție naturală pentru "valoarea lui p în T " este

$p(T) = \sum_{k=0}^m a_k T^k$; în această formulă $T^0 = I$. Este ușor de demonstrat că

pentru orice două polinoame p, q și $\alpha, \beta \in C$, avem:

(i) $(\alpha p + \beta q)(T) = \alpha p(T) + \beta q(T)$.

(ii) $(pq)(T) = p(T)q(T)$.

Aplicația $p \rightarrow p(T)$ se numește **calculul funcțional** (polinomial) al operatorului T . Extinderea acestei aplicații la alte clase de funcții este o problemă importantă.

Demonstrăm mai întâi legătura dintre calculul funcțional și teorema de descompunere spectrală pentru operatori normali.

35. Propoziție

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal și fie $T = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$ descompunerea sa spectrală. Atunci, pentru orice polinom p , avem:

$$p(T) = \sum_{i=1}^m p(\lambda_i) P_i.$$

Demonstrație Este suficient să demonstrăm că pentru orice $k \in N$, avem:

$$T^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k P_i.$$

Deoarece $P_i P_j = O$ dacă $i \neq j$ și $P_i^2 = P_i$, rezultă:

$$T^2 = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i P_i \right) \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j P_i P_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 P_i.$$

Egalitatea pentru k oarecare rezultă prin inducție.

36. Definiție (calcul funcțional)

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal având descompunerea spectrală $T = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$ și fie f o funcție de variabilă complexă al cărei domeniu de definiție include spectrul operatorului T . În acest caz definim:

$$f(T) = \sum_{i=1}^m f(\lambda_i) P_i.$$

Din propoziția 35 rezultă că pentru funcții polinomiale această definiție coincide cu definiția 34. Se verifică simplu următoarele proprietăți:

- (i) $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$, (liniaritate),
- (ii) $(fg)(T) = f(T)g(T)$, (multiplicativitate) $\forall \alpha, \beta \in C$ și pentru orice funcții f, g definite pe spectrul lui T .

Să observăm că din această definiție rezultă că operatorul $f(T)$ este și el normal, iar $\sum_{i=1}^m f(\lambda_i) P_i$ este descompunerea sa spectrală.

De exemplu, dacă $f(z) = \bar{z}$, atunci $f(T) = T^*$; Fie $g(z) = \frac{1}{z}$. Dacă operatorul T este și inversabil (deci 0 nu este în spectrul său), atunci are sens $g(T)$; obținem $g(T) = T^{-1}$.

O proprietate importantă a calculului funcțional este teorema de transformare a spectrului.

37. Teoremă (de transformare a spectrului)

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal și fie f o funcție definită pe spectrul lui T ; atunci:

$$\sigma(f(T)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Vom nota în continuare mulțimea din membrul drept al acestei egalități cu $f(\sigma(T))$.

Demonstrație Fie $T = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$ descompunerea spectrală a operatorului T ; atunci, din descompunerea spectrală $f(T) = \sum_{i=1}^m f(\lambda_i) P_i$, rezultă că valorile proprii ale lui $f(T)$ sunt $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_m)$, ceea ce încheie demonstrația.

O aplicație remarcabilă a calculului funcțional este existența rădăcinii pătrate pozitive pentru operatori pozitivi.

38. Teoremă (rădăcina pătrată)

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator pozitiv. Atunci există un unic operator pozitiv $S \in \mathcal{L}(C^n)$ astfel încât $T = S^2$; operatorul S se numește **rădăcina pătrată pozitivă** a lui T și se notează cu \sqrt{T} .

Demonstrație Deoarece T este operator pozitiv, avem incluziunea: $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$. Rezultă deci că funcția radical $f(t) = \sqrt{t}$ este definită pe spectrul operatorului T ; fie $S = f(T) = \sqrt{T}$. Fie $\text{id}(t) = t$ funcția identică. Deoarece $f^2 = \text{id}$, din multiplicativitatea calculului funcțional rezultă că $S^2 = \text{id}(T) = T$.

Din teorema de transformare a spectrului rezultă că

$$\sigma(\sqrt{T}) = \{\sqrt{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\} \subset [0, \infty),$$

și deci, conform teoremei 33(ii) operatorul \sqrt{T} este pozitiv.

Unicitatea lui S rezultă din unicitatea formulei de descompunere spectrală; dacă $T = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$ este descompunerea spectrală a lui T , atunci

$$S = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} P_i = \sqrt{T}$$

este descompunerea spectrală a lui \sqrt{T} .

39. Consecință

Fie $A, B \in \mathcal{L}(C^n)$ doi operatori pozitivi; dacă $AB = BA$, atunci produsul AB este de asemenea pozitiv.

Pentru demonstrație trebuie observat că dacă A și B comută, atunci \sqrt{A} și \sqrt{B} comută și ei.

O aplicație interesantă a rădăcinii pătrate este existența unei descompuneri analoge descompunerii polare de la numere complexe. Se știe că orice număr complex nenul z se poate scrie (în mod unic) sub forma $z = ru$, unde $r = |z| > 0$ și $|u| = 1$.

40. Teoremă (descompunerea polară)

Pentru orice $T \in \mathcal{L}(C^n)$ există un unic operator pozitiv $P \in \mathcal{L}(C^n)$ și un operator unitar (nu neapărat unic) $U \in \mathcal{L}(C^n)$ astfel încât $T = UP$. Dacă în plus operatorul T este inversabil, atunci U este unic determinat.

Demonstrație Vom face mai întâi demonstrația în ipoteza că T este inversabil, apoi vom trata cazul general. Fie $P = \sqrt{T^*T}$ și fie

$V = PT^{-1}$; atunci, dacă notăm $U = V^{-1}$, obținem $T = UP$, unde P este un operator pozitiv. Mai avem de arătat că U este unitar. Pentru aceasta arătăm că V este unitar; deoarece $V^* = (T^*)^{-1}P$, rezultă:

$$V^*V = (T^*)^{-1}PPT^{-1} = (T^*)^{-1}T^*TT^{-1} = I,$$

și deci V este unitar. Pentru a demonstra unicitatea lui P , să presupunem că $UP = T = U_oP_o$ este o altă descompunere polară a lui T . Din egalitatea $UP = U_oP_o$, prin trecere la adjuncți rezultă $PU^* = P_oU_o^*$ și deci:

$$P^2 = PU^*UP = P_oU_o^*U_oP_o = P_o^2.$$

Deoarece rădăcina pătrată pozitivă este unică, rezultă că $P = P_o$. Pentru a demonstra unicitatea lui U să observăm că dacă T este inversabil atunci și $P = U^{-1}T$ este inversabil și deci din egalitatea $UP = U_oP$ obținem $U = U_o$. Considerăm acum cazul general; operatorul P se construiește la fel: $P = \sqrt{T^*T}$. Construim acum U ; pentru aceasta, să observăm că pentru orice $x \in C^n$, avem:

$$\| Px \|^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle P^2x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \| Tx \|^2.$$

Definim operatorul U mai întâi pe subspațiul $\text{Im}(P)$ prin $U(Px) = Tx, \forall x \in C^n$. Definiția este corectă, în sensul că dacă $Px_1 = Px_2$, atunci $Tx_1 = Tx_2$; pentru aceasta folosim egalitatea demonstrată mai sus:

$$0 = \| P(x_1 - x_2) \|^2 = \| T(x_1 - x_2) \|^2.$$

Tot din egalitatea $\| Px \|^2 = \| Tx \|^2$, rezultă că $U : \text{Im}(P) \rightarrow \text{Im}(T)$ este o izometrie:

$$\| U(Px) \|^2 = \| Tx \|^2 = \| Px \|^2, \forall x \in C^n.$$

De aici rezultă că subspațiile $\text{Im}(P)$ și $\text{Im}(T)$ au aceeași dimensiune (fiind izomorfe) și deci și ortogonalele lor au dimensiuni egale; fie

$$W : (\text{Im}(P))^\perp \rightarrow (\text{Im}(T))^\perp$$

o izometrie liniară arbitrară (există, deoarece cele două subspații sunt izomorfe). Prelungim U pe întregul C^n , punând $U = W$ pe $(\text{Im}(P))^\perp$. Rezultă deci că U este o izometrie pe C^n , adică

$$\| Ux \|^2 = \| x \|^2, \forall x \in C^n.$$

Conform observației 19 rezultă că U este operator unitar; egalitatea $UP = T$ este de asemenea verificată și deci demonstrația este completă.

Variante infinite dimensionale ale rezultatelor de mai sus vor fi studiate în capitolul 5.

O consecință a teoremei de descompunere polară este și următoarea formulă de schimbare de variabilă pentru măsura Lebesgue.

41. Teoremă

Fie μ măsura Lebesgue în R^n , fie $T \in \mathcal{L}(R^n)$ un operator inversabil și fie $\det(T)$ determinantul matricei operatorului T (într-o bază arbitrară fixată). Atunci, pentru orice mulțime măsurabilă Lebesgue E , avem:

$$\mu(T(E)) = |\det(T)|\mu(E).$$

Demonstrație Fie \mathcal{M} familia mulțimilor măsurabile Lebesgue în R^n . Este evident că aplicația $\mu \circ T : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ este o măsură invariantă la translații; din teorema de unicitate a măsurii Lebesgue în R^n ([3], p.325), rezultă că există o constantă $c(T) > 0$ astfel încât

$$(\mu \circ T)(E) = c(T)\mu(E), \forall E \in \mathcal{M}.$$

Fie D pătratul unitate din R^n , adică

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n; x_j \in [0, 1], \forall 1 \leq j \leq n\}.$$

Atunci, deoarece $\mu(D) = 1$, rezultă $c(T) = \mu(T(D))$. Vom demonstra în continuare că $c(T) = |\det(T)|$. Pentru aceasta, fie $S \in \mathcal{L}(R^n)$; pentru orice $E \in \mathcal{M}$, avem:

$$\begin{aligned} c(TS)\mu(E) &= (\mu \circ TS)(E) = \mu(T(S(E))) = \\ &= c(T)\mu(S(E)) = c(T)c(S)\mu(E), \end{aligned}$$

deci am demonstrat egalitatea

$$c(TS) = c(T)c(S), \forall T, S \in \mathcal{L}(R^n).$$

Propunem ca exercițiu egalitatea $c(W) = 1$, pentru orice operator unitar W . Operatorul T fiind inversabil, conform teoremei 41 el admite o unică descompunere polară $T = UA$, unde U este operator unitar, iar A este operator pozitiv și inversabil. Operatorul A fiind pozitiv, el este și normal, deci este diagonalizabil; ca urmare, există $V \in \mathcal{L}(R^n)$ un operator unitar astfel încât operatorul $V^{-1}AV$ este diagonal. Rezultă deci (cf. teoremei 20) că vectorii bazei canonice sunt vectori proprii pentru $V^{-1}AV$, adică:

$$V^{-1}AVe_i = \lambda_i e_i, \forall 1 \leq i \leq n,$$

unde, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii (strict pozitive) ale lui A , iar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este baza canonică din R^n . Fie

$$D_\lambda = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n; 0 \leq x_i \leq \lambda_i, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Atunci, din relația $(V^{-1}AV)(D) = D_\lambda$, obținem:

$$\begin{aligned} c(A) &= c(V^{-1})c(A)c(V) = c(V^{-1}AV) = c(V^{-1}AV)\mu(D) = \\ &= \mu(V^{-1}AV(D)) = \mu(D_\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda_i. \end{aligned}$$

Rezultă: $c(T) = c(U)c(A) = c(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$. Pentru orice mulțime măsurabilă Lebesgue E , avem:

$$\begin{aligned} \mu(T(E)) &= c(T)\mu(E) = c(U)c(A)\mu(E) = c(A)\mu(E) = \\ &= \det(A)\mu(E) = |\det(U)|\det(A)\mu(E) = |\det(T)|\mu(E). \end{aligned}$$

Capitolul 3

Teoreme fundamentale de analiză funcțională

3.1 Operatori liniari și continui pe spații normate

1. Definiție

Fie $(X, \|\cdot\|)$ și $(Y, \|\cdot\|)$ două spații normate (complexe). Reamintim că un **operator** $T : X \rightarrow Y$ se numește **liniar** dacă

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y \in X.$$

Operatorul T se numește **continuu în punctul** $x_o \in X$ dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$ cu proprietatea $\|x - x_o\| < \delta$, să avem $\|Tx - Tx_o\| < \epsilon$, sau, într-o formulare echivalentă (cu șiruri), dacă $\forall (x_n)_n \subset X$ cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_o$, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx_o$. Operatorul T se numește **continuu** dacă este continuu în orice punct. Vom nota **mulțimea operatorilor liniari și continui** de la X în Y cu $\mathcal{L}(X, Y)$. Dacă $X = Y$, vom nota această mulțime cu $\mathcal{L}(X)$. În capitolul 2 am studiat cazul $X = C^n$. Conform teoremei 13, cap. 2, orice operator liniar pe C^n este continuu. Pe spații normate infinit dimensionale, există operatori liniari care nu sunt continui (a se vedea, de exemplu observația 42 din acest capitol).

2. Observație

Mulțimea $\mathcal{L}(X, Y)$ se poate organiza ca spațiu vectorial cu operațiile uzuale: $(T + S)(x) = Tx + Sx$ și $(\alpha T)x = \alpha Tx$, pentru orice operatori $T, S \in \mathcal{L}(X)$ și pentru orice $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Vom nota cu O operatorul nul și cu $-T$ opusul lui T .

3. Propoziție

Fie $(X, \|\cdot\|)$ și $(Y, \|\cdot\|)$ două spații normate și fie $T : X \rightarrow Y$ un operator liniar. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) T este continuu în 0.
- (b) T este continuu.
- (c) Există $M > 0$ astfel încât $\|Tx\| \leq M \|x\|$, $\forall x \in X$.
- (d) Pentru orice submulțime mărginită $A \subseteq X$, submulțimea $T(A) \subseteq Y$ este de asemenea mărginită.

Demonstrație Implicația (a) \Rightarrow (b) o propunem ca exercițiu.

(b) \Rightarrow (c). Din continuitatea lui T în 0, (și $T(0) = 0$), rezultă că pentru orice $\epsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât $\|Ty\| \leq \epsilon$, $\forall y \in X$ cu proprietatea $\|y\| \leq \delta$. Fie $x \in X$; atunci, scriind inegalitatea de mai sus pentru $\epsilon = 1$ și $y = \delta \|x\|^{-1} x$, obținem $\|Tx\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|$.

Implicația (c) \Rightarrow (d) este și ea evidentă.

(d) \Rightarrow (a). Fie $\epsilon > 0$ și fie $\delta > 0$ astfel încât $\|\frac{\delta}{\epsilon}x\| \leq 1$. Din ipoteza (d) rezultă $\|T(\frac{\delta}{\epsilon}x)\| \leq \delta$; în concluzie, dacă $\|x\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}$, rezultă că $\|Tx\| \leq \epsilon$, ceea ce arată că T este continuu în origine.

4. Definiție

Pentru orice $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, definim:

$$\|T\| = \inf\{M > 0; \|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in X\};$$

$$\|T\|_1 = \sup\{\|Tx\|; x \in X \text{ și } \|x\| = 1\};$$

$$\|T\|_2 = \sup\{\|Tx\|; x \in X \text{ și } \|x\| \leq 1\}.$$

Să observăm că buna definiție a lui $\|\cdot\|$ este asigurată de punctul (c) din propoziția anterioară. Facem de asemenea precizarea că notațiile $\|T\|_1$ și $\|T\|_2$ vor fi folosite numai în cursul demonstrației lemei următoare.

5. Lemă

(a) Pentru orice $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, avem $\|T\| = \|T\|_1 = \|T\|_2$.

(b) Aplicația $T \rightarrow \|T\|$ este o normă pe spațiul vectorial $\mathcal{L}(X, Y)$.

Demonstrație (a) Demonstrăm mai întâi inegalitatea:

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|, \forall x \in X. \quad (3.1)$$

Fie $\mathcal{D} = \{M > 0; \|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in X\}$. Deoarece $\|T\| = \inf \mathcal{D}$, rezultă că există un șir $M_n \in \mathcal{D}$ astfel încât $\|T\| = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ și $\|T(x)\| \leq M_n \|x\|$. Din aceste două relații, rezultă, pentru $n \rightarrow \infty$, inegalitatea (3.1). Folosind acum (3.1), obținem:

$$\begin{aligned} \|T\|_2 &= \sup\{\|Tx\|; x \in X \text{ și } \|x\| \leq 1\} \leq \\ &\leq \sup\{\|T\| \|x\|; x \in X \text{ și } \|x\| \leq 1\} = \|T\|, \end{aligned}$$

și deci am demonstrat :

$$\|T\|_2 \leq \|T\|. \quad (3.2)$$

Pentru orice $x \in X$, $x \neq 0$, vectorul $u = \|x\|^{-1} x$ are normă 1 și deci:

$$\frac{1}{\|x\|} \|Tx\| = \|Tu\| \leq \sup\{\|Ty\|; y \in X \text{ și } \|y\| = 1\} = \|T\|_1,$$

și deci am demonstrat inegalitatea:

$$\|Tx\| \leq \|T\|_1 \|x\|, \quad (3.3)$$

pentru orice $x \in X$; (pentru $x = 0$, (3.3) este evidentă). Din (3.3) rezultă că $\|T\|_1 \in \mathcal{D}$ și deci din definiția lui $\|T\|$, rezultă:

$$\|T\|_1 \geq \|T\|. \quad (3.4)$$

Cum inegalitatea $\|T\|_1 \leq \|T\|_2$ este evidentă, din (3.2) și (3.4) rezultă egalitatea de la punctul **(a)**.

(b) Dacă $\|T\| = 0$, atunci $Tu = 0$, $\forall u \in X$ cu proprietatea $\|u\| = 1$; fie $x \in X$, oarecare. Atunci $u = \|x\|^{-1} x$ are normă 1 și deci $Tu = 0$, adică $Tx = 0$ și deci $T = O$. Celelalte 2 proprietăți ale normei rezultă din proprietățile corespunzătoare ale normelor din X și Y .

6. Definiție

Din Lema anterioară rezultă că $\mathcal{L}(X, Y)$ poate fi organizat ca spațiu normat cu norma din definiția 3. Atunci când nu se va specifica în mod explicit contrariul, pe spațiul $\mathcal{L}(X, Y)$ se va subînțelege topologia definită de această normă.

7. Teoremă

Fie $(X, \|\cdot\|)$ și $(Y, \|\cdot\|)$ spații normate. Dacă Y este complet, atunci $\mathcal{L}(X, Y)$ este spațiu Banach.

Demonstrație Fie T_n un șir Cauchy în $\mathcal{L}(X, Y)$, deci pentru orice $\epsilon > 0$, există $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon, \quad \forall n, m \geq n_\epsilon. \quad (3.5)$$

Din inegalitatea (3.1), aplicată operatorului $T_n - T_m$ și din (3.5), rezultă:

$$\| T_n x - T_m x \| < \epsilon \| x \|, \forall n, m \geq n_\epsilon, \forall x \in X. \quad (3.6)$$

Din inegalitatea (3.6) rezultă că pentru orice $x \in X$ șirul $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir Cauchy în spațiul Y , care, conform ipotezei, este complet. Fie deci $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$, pentru orice $x \in X$. Liniaritatea operatorului T astfel definit este imediată. Demonstrăm acum continuitatea lui T . Din inegalitatea (3.6), pentru $m \rightarrow \infty$ rezultă:

$$\| T_n x - Tx \| \leq \epsilon \| x \|, \forall x \in X, \forall n \geq n_\epsilon. \quad (3.7)$$

Din propoziția 3 (**b** ⇔ **c**) și din inegalitatea (3.7) rezultă că operatorul $T_n - T$ este continuu și deci $T = T_n - (T_n - T) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Tot din (3.7) și din definiția normei în $\mathcal{L}(X, Y)$ rezultă că $\| T_n - T \| \leq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că șirul T_n este convergent la T .

8. Definiție

Fie X un spațiu normat. Orice aplicație $f : X \rightarrow C$ se numește funcțională (pe spațiul X). Mulțimea funcționalelor liniare și continue se notează cu X' și se numește **dualul** lui X . Deoarece spațiul C este complet, din teorema precedentă (pentru $Y = C$) rezultă că X' este spațiu Banach. Evident, aceeași construcție se poate aplica și spațiului X' ; se obține spațiul Banach X'' , (numit al doilea dual al lui X , sau **bidualul**). Dacă $x \in X$, atunci aplicația $\phi_x : X' \rightarrow C, \phi_x(f) = f(x)$, este în X'' și $\| \phi_x \| = \| x \|$, ([4], p.120). În felul acesta, orice spațiu Banach X este izomorf (în mod canonic) cu un subspațiu din X'' . Dacă în plus aplicația $X \ni x \rightarrow \phi_x \in X''$, este un izomorfism de spații Banach, atunci X se numește spațiu **reflexiv** (în general această aplicație nu este surjectivă).

9. Observație

Din teorema lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe un spațiu Hilbert H , rezultă că dacă $f \in H'$, $f(x) = \langle x, y_f \rangle$, atunci $\| f \| = \| y_f \|$ și deci aplicația $F : H' \rightarrow H, F(f) = y_f$ este o bijecție cu proprietățile: $F(f + g) = F(f) + F(g)$, $F(\alpha f) = \bar{\alpha} F(f)$ și $\| F(f) \| = \| f \|$; este simplu de observat că H' se poate organiza ca spațiu Hilbert cu produsul scalar $\langle f, g \rangle = \langle F(f), F(g) \rangle$. Deși F nu este un izomorfism de spații Hilbert (decât în cazul în care corpul scalarilor este R), în majoritatea situațiilor este convenabilă identificarea lui H' cu H . O altă consecință imediată a teoremei lui Riesz este faptul că orice spațiu Hilbert este reflexiv, ([4], p.166). Nu există o teoremă de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe un spațiu Banach arbitrar; dăm în continuare caracterizările

dualelor unor spații Banach uzuale.

10.Exemplu

(i) Fie $\alpha \in \ell^\infty(Z)$, (a se vedea exemplele 4(ii) și (iii) din capitolul 1); atunci aplicația

$$f_\alpha : \ell^1(Z) \rightarrow C, f_\alpha(x) = \sum_{n \in Z} \alpha(n)x(n)$$

este o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\ell^1(Z)$ cu proprietatea

$$\|f_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty.$$

Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă f pe spațiul $\ell^1(Z)$, există $\alpha \in \ell^\infty(Z)$ astfel încât $f = f_\alpha$.

Demonstrație Fie $\alpha \in \ell^\infty(Z)$ și fie f_α ca în enunț; este evident că f_α este liniară. Continuitatea sa rezultă din inegalitatea:

$$|f_\alpha(x)| = \left| \sum_{n \in Z} \alpha(n)x(n) \right| \leq \left(\sum_{n \in Z} |x(n)| \right) \sup_{n \in Z} |\alpha(n)|, \forall x \in \ell^1(Z).$$

Tot de aici rezultă și inegalitatea $\|f_\alpha\| \leq \|\alpha\|_\infty$. Demonstrăm acum inegalitatea inversă. Pentru aceasta, fie $\sigma_k \in \ell^1(Z)$ definit prin:

$$\sigma_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = k \\ 0 & \text{dacă } n \neq k \end{cases}$$

Evident, $\|\sigma_k\|_1 \leq 1$, și deci

$$\|f_\alpha\| = \sup\{|f_\alpha(y)|; \|y\|_1 \leq 1\} \geq |f_\alpha(\sigma_k)| = |\alpha(k)|.$$

Luând acum supremumul după k , rezultă $\|f_\alpha\| \geq \|\alpha\|_\infty$.

Demonstrăm acum afirmația reciprocă; fie f o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\ell^1(Z)$ și fie σ_k definit mai sus.

Pentru orice $x \in \ell^1(Z)$, fie seria (de elemente din $\ell^1(Z)$), $\sum_{k \in Z} x(k)\sigma_k$. Este ușor de arătat că această serie converge în spațiul $\ell^1(Z)$ la șirul x , deci

$$x = \sum_{k \in Z} x(k)\sigma_k.$$

Rezultă deci (folosind liniaritatea și continuitatea lui f):

$$f(x) = \sum_{k \in Z} x(k)f(\sigma_k), \forall x \in \ell^1(Z).$$

Definim șirul $\alpha(k) = f(\sigma_k)$, $\forall k \in Z$; rezultă că $\|\alpha\|_\infty \leq \|f\|$ (deci α este mărginit) și $f = f_\alpha$.

În mod analog se poate identifica și dualul spațiului $\ell^1(N)$ cu $\ell^\infty(N)$.

Prezentăm în continuare, fără demonstrații, (ele pot fi găsite în [4], p.111), caracterizările dualelor altor spații Banach uzuale.

(ii) Dualul spațiului $\ell^p(Z)$

Fie $p > 1$ și fie $q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dacă $\alpha \in \ell^q(Z)$, atunci aplicația

$$f_\alpha : \ell^p(Z) \rightarrow C, f_\alpha(x) = \sum_{n \in Z} \alpha(n)x(n),$$

este o funcțională liniară și continuă cu proprietatea $\|f\| = \|\alpha\|_q$.

Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă f pe spațiul $\ell^p(Z)$, există $\alpha \in \ell^q(Z)$ astfel încât $f = f_\alpha$.

(iii) Dualul spațiului $L^1(\Omega, \mu)$

Fie (Ω, μ) un spațiu cu măsură σ -finită, adică există o partiție cel mult numărabilă a lui Ω , formată din mulțimi măsurabile $\{\mathcal{X}_n\}_{n \in N}$ astfel încât $\mu(\mathcal{X}_n) < \infty, \forall n \in N$.

Dacă $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$, (a se vedea exemplele 4(i) și (vi), capitolul 1), atunci funcționala

$$F_\phi : L^1(\Omega, \mu) \rightarrow C, F_\phi(f) = \int_{\Omega} \phi(t)f(t)d\mu(t),$$

este o funcțională liniară și continuă cu proprietatea $\|F_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă F pe spațiul $L^1(\Omega, \mu)$, există și este unic $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ astfel încât $F = F_\phi$.

(iv) Dualul spațiului $L^p(\Omega, \mu)$

Fie $p > 1$ și $q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dacă $\phi \in L^q(\Omega, \mu)$, atunci funcționala

$$F_\phi : L^p(\Omega, \mu) \rightarrow C, F_\phi(f) = \int_{\Omega} \phi(t)f(t)d\mu(t),$$

este o funcțională liniară și continuă cu proprietatea $\|F_\phi\| = \|\phi\|_q$.

Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă F pe spațiul $L^p(\Omega, \mu)$, există și este unic $\phi \in L^q(\Omega, \mu)$ astfel încât $F = F_\phi$.

11. Observație

Convergența în spațiul normat $\mathcal{L}(X, Y)$ se numește **convergență uniformă**.

Pe mulțimea $\mathcal{L}(X, Y)$ se mai pot defini și alte tipuri de convergență; spunem că șirul de operatori $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ converge **punctual** (sau **tare-operatorial**) la $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = T x, \forall x \in X;$$

spunem că șirul $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ converge **slab-operatorial** la operatorul $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(T_n x) = f(T x), \forall x \in X, \forall f \in X'.$$

Lăsăm ca exercițiu cititorului afirmațiile: convergența uniformă o implică pe cea punctuală, iar aceasta pe cea slabă, reciprocele fiind, în general, false.

12. Definiție

Fie X, Y, Z trei spații normate și fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ și $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Operatorul $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$, definit prin $(ST)(x) = S(Tx)$ se numește **produsul** operatorilor S și T . Să mai observăm că din inegalitățile :

$$\| STx \| \leq \| S \| \| Tx \| \leq \| S \| \| T \| \| x \|, \forall x \in X,$$

rezultă $\| ST \| \leq \| S \| \| T \|$. Să considerăm acum un operator $T \in \mathcal{L}(X)$. El se numește **inversabil** dacă există un alt operator $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ astfel încât $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, unde, I este operatorul identic, adică $Ix = x, \forall x \in X$. Este simplu de observat că dacă T este bijectiv, atunci T^{-1} este liniar; în general însă, operatorul T^{-1} nu este continuu; dacă $X = C^n$ este un spațiu finit dimensional, atunci T^{-1} este continuu în virtutea faptului că pe spații finit dimensionale orice aplicație liniară este și continuă, rezultat demonstrat în teorema 13, cap. 2. Un rezultat fundamental în această direcție este teorema aplicației deschise (pe care o vom demonstra în paragraful 4 al acestui capitol). Prezentăm în continuare două rezultate referitoare la inversabilitatea operatorilor liniari și continui.

13. Propoziție

Fie X, Y două spații normate și fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dacă T este bijectiv, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) T^{-1} este operator continuu.

(b) Există $m > 0$ astfel încât $\| Tx \| \geq m \| x \|, \forall x \in X$. În acest caz, are loc inegalitatea $\| T^{-1} \| \leq m^{-1}$.

Un operator arbitrar (nu neapărat bijectiv) care satisface condiția (b) se numește **mărginit inferior**. Este evident că un operator mărginit inferior este injectiv.

Demonstrație (a) \Rightarrow (b) Dacă T^{-1} este operator continuu, atunci, conform

propoziției 3, există $M > 0$ astfel încât $\|T^{-1}y\| \leq M \|y\|$, $\forall y \in Y$. Notând $x = T^{-1}y \in X$, rezultă $\|x\| \leq M \|Tx\|$, $\forall x \in X$ și deci luând $m = M^{-1}$ relația **(b)** este verificată.

(b) \Rightarrow (a) Fie $x \in X$ și fie $y = Tx$; din ipoteză avem:

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{m} \|Tx\| = \frac{1}{m} \|y\|,$$

deci conform propoziției 3 operatorul T^{-1} este continuu și avem $\|T^{-1}\| \leq m^{-1}$.

14. Propoziție

Fie X un spațiu Banach și fie $T \in \mathcal{L}(X)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) T este inversabil;

(b) T este mărginit inferior și subspațiul $\text{Im}(T) = \{Tx; x \in X\}$ este dens în X .

Demonstrație (a) \Rightarrow (b) Dacă T este inversabil, atunci T este surjectiv, deci $\text{Im}(T) = X$. Pentru orice $x \in X$, avem:

$$\|Tx\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|T^{-1}Tx\| = \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|x\|,$$

și deci T este mărginit inferior. Să observăm de asemenea că din inegalitatea de mai sus rezultă și $\|T^{-1}\| \geq \|T\|^{-1}$.

(b) \Rightarrow (a) Fie, conform ipotezei, $m > 0$ astfel încât

$\|Tx\| \geq m \|x\|$, $\forall x \in X$ și fie $(Tx_n)_n \subset \text{Im}(T)$ un șir Cauchy. Din inegalitatea anterioară rezultă că pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$ avem: $\|x_n - x_m\| \leq m^{-1} \|Tx_n - Tx_m\|$, și deci $(x_n)_n$ este șir Cauchy în X care este complet. Fie deci $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Din continuitatea lui T rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$, ceea ce arată că $\text{Im}(T)$ este subspațiu închis în X . Cum din ipoteză $\text{Im}(T)$ este dens, rezultă că T este surjectiv, deci T este bijectiv. Continuitatea lui T^{-1} rezultă acum din propoziția 13.

3.2 Teorema Hahn-Banach

15. Definiție

Fie X un spațiu vectorial real sau complex. O funcțională $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **subliniară** dacă $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ și $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, pentru orice $x, y \in X$ și $\alpha \geq 0$. Din definiție rezultă imediat proprietățile $p(0) = 0$ și $-p(-x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

În demonstrația teoremei principale din acest paragraf (teorema Hahn-Banach) vom folosi lema lui Zorn, pe care o reamintim în continuare.

16.Lema lui Zorn

Fie (\mathcal{A}, \leq) o mulțime (parțial) ordonată. O submulțime $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ se numește **total ordonată** dacă $\forall a, b \in \mathcal{B}$, atunci $a \leq b$ sau $b \leq a$. Se numește **majorant** al mulțimii \mathcal{B} orice element $c \in \mathcal{A}$ astfel încât $a \leq c, \forall a \in \mathcal{B}$. Spunem că $m \in \mathcal{A}$ este un **element maximal** al lui \mathcal{A} dacă pentru orice $x \in \mathcal{A}$ cu proprietatea $m \leq x$, rezultă $x = m$. Mulțimea \mathcal{A} se numește **inductiv ordonată** dacă orice submulțime total ordonată a lui \mathcal{A} admite majoranți.

Lema lui Zorn afirmă că orice mulțime nevidă inductiv ordonată admite un element maximal; [2],p.3; [4],p.8.

18.Teorema Hahn-Banach

Fie X un spațiu vectorial real și fie p o funcțională subliniară pe X . Fie Y un subspațiu în X și fie $g : Y \rightarrow R$, o funcțională liniară cu proprietatea $g(x) \leq p(x), \forall x \in Y$. Atunci există $f : X \rightarrow R$, o funcțională liniară cu proprietățile: $f(x) = g(x), \forall x \in Y$ și $f(x) \leq p(x), \forall x \in X$.

Se spune că f prelungește pe g la întreg spațiul cu păstrarea inegalității $f(x) \leq p(x), \forall x \in X$.

Demonstrație În cele ce urmează, dacă h este o funcțională liniară, vom nota cu $D(h)$ subspațiul din X pe care este ea definită. Notăția $g \preceq h$ va însemna că h este o funcțională liniară cu proprietățile $D(h) \supseteq Y, h(y) = g(y), \forall y \in Y$ și $h(x) \leq p(x), \forall x \in D(h)$. Fie:

$$\mathcal{A} = \{h : D(h) \rightarrow R; g \preceq h\}.$$

Mulțimea \mathcal{A} este nevidă deoarece îl conține pe g . Se demonstrează fără dificultate că \mathcal{A} este inductiv ordonată; fie f elementul maximal dat de Lema lui Zorn. Demonstrația se încheie dacă $D(f) = X$. Presupunem prin absurd că există $a \in X - D(f)$. Construim funcționala $h : D(h) = D(f) + aR \rightarrow R, h(x + at) = f(x) + at$, unde, α este o constantă reală neprecizată încă. Vom demonstra că putem alege α astfel încât $h \in \mathcal{A}$, ceea ce ar constitui o contradicție cu maximalitatea lui f (incluziunea $D(h) \supset D(f)$ este, în mod evident, strictă). Relația pe care trebuie să o satisfacă α pentru ca $h \in \mathcal{A}$ este:

$$f(x) + at \leq p(x + at), \forall x \in D(f), \forall t \in R,$$

sau, echivalent

$$f(x) - p(x - a) \leq p(x + a) - f(x), \quad (3.8)$$

pentru orice $x \in D(f)$. Din ipoteză, pentru orice $x, y \in D(f)$ avem:

$$f(x) + f(y) \leq p(x + y) \leq p(x + a) + p(y - a),$$

deci pentru orice $x, y \in D(f)$, avem:

$$f(y) - p(y - a) \leq p(x + a) - f(x),$$

ceea ce arată că există $\alpha \in R$ cu proprietatea (3.8).

19. Corolar

Fie X un spațiu vectorial real și p o funcțională subliniară pe X . Atunci, pentru orice $x_o \in X$ există o funcțională liniară f pe X astfel încât $f(x_o) = p(x_o)$ și $f(x) \leq p(x), \forall x \in X$.

Pentru demonstrație, se aplică teorema Hahn-Banach pentru $Y = \{\alpha x_o; \alpha \in R\}$ și $g(\alpha x_o) = \alpha p(x_o)$.

O problemă importantă de geometrie în a cărei rezolvare teorema Hahn-Banach este un instrument esențial este separarea submulțimilor nevide, convexe și disjuncte dintr-un spațiu normat.

20. Definiție

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat (real) și fie $f : X \rightarrow R$ o funcțională liniară neidentică nulă. Pentru orice $\alpha \in R$, mulțimea:

$$Y(f, \alpha) = \{x \in X; f(x) = \alpha\}$$

se numește **hiperplanul** de ecuație $f = \alpha$.

Propunem ca exercițiu afirmația: hiperplanul $Y(f, \alpha)$ este submulțime închisă în X dacă și numai dacă funcționala f este continuă.

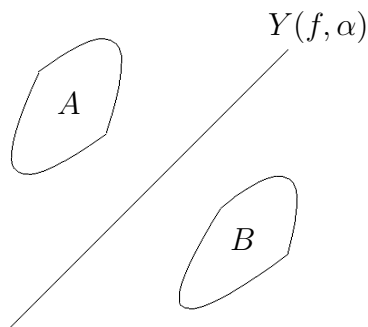
Fie A și B două submulțimi nevide în X . Spunem că hiperplanul $Y(f, \alpha)$ **separă nestrict** A de B dacă:

$$f(x) \leq \alpha, \forall x \in A \text{ și } f(x) \geq \alpha, \forall x \in B.$$

Spunem că hiperplanul $Y(f, \alpha)$ **separă strict** A de B dacă există $\epsilon > 0$ astfel încât:

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon, \forall x \in A \text{ și } f(x) \geq \alpha + \epsilon, \forall x \in B.$$

Din punct de vedere geometric, separarea înseamnă că A și B se găsesc ”de o parte și de alta a lui $Y(f, \alpha)$ ”.



21. Teoremă

Fie X un spațiu normat (real) și fie $A \subset X$ și $B \subset X$ două submulțimi nevide, convexe și disjuncte.

(a) Dacă A este submulțime deschisă, atunci există o funcțională liniară și continuă f pe X și $\alpha \in R$ astfel încât hiperplanul (închis) $Y(f, \alpha)$ separă nestrict A de B .

(b) Dacă A este submulțime închisă și B este compactă, atunci există o funcțională liniară și continuă f pe X și $\alpha \in R$ astfel încât hiperplanul (închis) $Y(f, \alpha)$ separă strict A de B .

Demonstrație (a) Vom face demonstrația în trei etape.

Etapa I. Fie $K \subset X$ o submulțime convexă astfel încât $0 \in K$. Atunci aplicația:

$$p : X \rightarrow R, p(x) = \inf\{a > 0; a^{-1}x \in K\},$$

este o funcțională subliniară pe X astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea $0 \leq p(x) \leq M \|x\|, \forall x \in X$. În plus, are loc egalitatea:

$$K = \{x \in X; p(x) < 1\}.$$

Pentru orice $\rho > 0$, vom nota cu $B(0, \rho)$ bila deschisă de centru 0 și rază ρ din X . Fie $r > 0$ astfel încât $B(0, r) \subset K$; este evident că $p(x) \leq r^{-1} \|x\|, \forall x \in X$, deci putem lua $M = r^{-1}$. Faptul că $p(tx) = tp(x), \forall x \in X, \forall t > 0$, este evident. Demonstrăm acum prin dublă incluziune egalitatea $K = \{x \in X; p(x) < 1\}$. Dacă $x \in K$, atunci, (deoarece K este mulțime deschisă), există $\epsilon > 0$ (suficient de mic) astfel încât $(1 + \epsilon)x \in K$, deci $p(x) \leq (1 + \epsilon)^{-1} < 1$. Invers, dacă $p(x) < 1$, atunci există $t \in (0, 1)$ astfel încât $t^{-1}x \in K$, deci $x = t(t^{-1}x) + (1 - t)0 \in K$.

Demonstrăm acum proprietatea $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.

Fie $x, y \in X$ și $\epsilon > 0$. Din egalitatea $K = \{x \in X ; p(x) < 1\}$, rezultă:

$$\frac{x}{p(x) + \epsilon} \in K \text{ și } \frac{y}{p(y) + \epsilon} \in K,$$

și deci, deoarece K este convexă, rezultă:

$$\frac{tx}{p(x) + \epsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y) + \epsilon} \in K, \forall t \in [0, 1].$$

În particular, pentru $t = (p(x) + p(y) + 2\epsilon)^{-1}(p(x) + \epsilon)$, obținem:

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\epsilon} \in K,$$

și deci $p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\epsilon$, ceea ce încheie demonstrația primei etape.

Etapa a II-a Fie $K \subset X$ o submulțime nevidă, convexă și deschisă și fie $x_o \in X$ astfel încât $x_o \notin K$. Atunci există o funcțională liniară și continuă $f : X \rightarrow R$, astfel încât $f(x) < f(x_o)$, $\forall x \in K$. În particular, hiperplanul (închis) $Y(f, f(x_o))$ separă nestrict $\{x_o\}$ de K .

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea că $0 \in K$ (făcând eventual o translație). Fie p funcționala subliniară introdusă în etapa I, adică $p(x) = \inf\{a > 0 ; a^{-1}x \in K\}$. Considerăm subspațiul vectorial generat de x_o : $\mathcal{V} = \{tx_o ; t \in R\}$. Fie $g : \mathcal{V} \rightarrow R$, $g(tx_o) = t$. Este evident că g este o funcțională liniară și că ea verifică inegalitatea $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in \mathcal{V}$. Conform teoremei Hahn-Banach, există o funcțională liniară $f : X \rightarrow R$ astfel încât

$$f(x) = g(x), \forall x \in \mathcal{V} \text{ și } f(x) \leq p(x), \forall x \in X.$$

Din etapa I, avem că $f(x) \leq p(x) \leq M \|x\|$, $\forall x \in X$, deci f este continuă. De asemenea, $f(x_o) = 1$ și deci, folosind egalitatea (demonstrată în etapa I) $K = \{x \in X ; p(x) < 1\}$, rezultă $f(x) < 1$, $\forall x \in K$.

Etapa a III-a Demonstrăm acum enunțul teoremei. Fie A și B ca în enunț și fie $K = \{x - y ; x \in A, y \in B\}$. Este simplu de arătat că mulțimea K este convexă și deschisă și $0 \notin K$. Conform celor demonstrate în etapa a II-a, (pentru $x_o = 0$), există o funcțională liniară și continuă $f : X \rightarrow R$, astfel încât $f(u) < 0$, $\forall u \in K$, adică:

$$f(x) < f(y), \forall x \in A, \forall y \in B.$$

De aici rezultă că există $\alpha \in R$ astfel încât

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y),$$

ceea ce arată că hiperplanul (închis) $Y(f, \alpha)$ separă nestrict A de B .

(b) Fie A și B ca în enunț și fie $\epsilon > 0$, suficient de mic, astfel încât mulțimile:

$$A_\epsilon = A + B(0, \epsilon) \text{ și } B_\epsilon = B + B(0, \epsilon)$$

să fie disjuncte și deschise. Cum A_ϵ și B_ϵ sunt și nevide și convexe, din (a) rezultă că există un hiperplan $Y(f, \alpha)$ care separă nestrict A_ϵ de B_ϵ , adică:

$$f(x + \epsilon u) \leq \alpha \leq f(y + \epsilon u), \forall x \in A, \forall y \in B, \forall u \in B(0, 1).$$

Deoarece $f(z) \leq \|f\| \|z\|$, $\forall z \in B(0, 1)$, rezultă:

$$f(x) + \epsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \epsilon \|f\|, \forall x \in A, \forall y \in B,$$

ceea ce arată că hiperplanul $Y(f, \alpha)$ separă strict A de B întrucât f nu este identic nulă.

În încheiere, menționăm că în R^n două mulțimi nevide, disjuncte și convexe se pot separa nestrict întotdeauna (fără alte ipoteze suplimentare): [16], p.211. Pentru completări în legătură cu acest subiect, recomandăm [2], p.4.

Revenim acum la problema prelungirii funcționalelor liniare și studiem cazul spațiilor vectoriale complexe.

22. Observație

Dacă X este un spațiu vectorial complex și p este o seminormă pe X , atunci p este și funcțională subliniară; în plus, următoarele relații se verifică imediat:

$$p(-x) = p(x) \text{ și } |p(x) - p(y)| \leq p(x - y).$$

Demonstrăm în continuare teorema Hahn-Banach pentru spații vectoriale complexe.

23. Teoremă

Fie X un spațiu vectorial complex, p o seminormă pe X și $Y \subseteq X$ un subspațiu vectorial. Atunci, pentru orice funcțională liniară $g : Y \rightarrow C$ astfel încât $|g(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in Y$, există o funcțională liniară $f : X \rightarrow C$ cu proprietățile:

$$f(x) = g(x), \forall x \in Y \text{ și } |f(x)| \leq p(x), \forall x \in X.$$

Demonstrație Fie $g : Y \rightarrow C$ ca în enunț și fie $g_1, g_2 : Y \rightarrow R$, funcționale liniare reale astfel încât $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$. Atunci, explicitând egalitatea $g(ix) = ig(x)$, obținem $g_1(ix) = -g_2(x)$, deci $g(x) = g_1(x) - ig_1(x)$. În plus, din ipoteză rezultă $|g_1(x)| \leq p(x)$,

$\forall x \in Y$. Aplicând teorema Hahn-Banach (cazul real) funcționalei reale g_1 rezultă că există $f_1 : X \rightarrow R$ funcțională liniară reală astfel încât $f_1(x) = g_1(x)$, $\forall x \in Y$ și $f_1(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

Definim $f : X \rightarrow C$, $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$; se demonstrează prin calcul direct că f satisface concluzia teoremei.

Prezentăm în continuare câteva consecințe (pe spații normate) ale teoremei Hahn-Banach.

24. Corolar

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat complex și fie $Y \subseteq X$ un subspațiu. Atunci, pentru orice funcțională liniară și continuă $g : Y \rightarrow C$ există $f \in X'$ astfel încât

$$f(x) = g(x), \forall x \in Y \text{ și } \|f\| = \sup\{|g(x)|; x \in Y, \|x\| \leq 1\}.$$

Demonstrație Fie $m = \sup\{|g(x)|; x \in Y, \|x\| \leq 1\}$ și fie $p : X \rightarrow R$, $p(x) = m \|x\|$. Aplicând teorema Hahn-Banach funcționalei g și seminorme p , demonstrația se încheie.

25. Corolar

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Atunci, pentru orice $x_o \in X$ există $f_o \in X'$ astfel încât:

$$\|f_o\| = \|x_o\| \text{ și } f_o(x_o) = \|x_o\|^2.$$

În particular, dacă $f(x_o) = 0, \forall f \in X'$, atunci $x_o = 0$.

Demonstrație Se aplică corolarul precedent pentru $Y = \{\alpha x_o; \alpha \in C\}$ și $g(\alpha x_o) = \alpha \|x_o\|^2$.

26. Corolar

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Atunci, pentru orice $x \in X$, are loc egalitatea:

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|; f \in X' \text{ și } \|f\| = 1\}.$$

În plus, există $f_x \in X'$ astfel încât $\|x\| = |f_x(x)|$.

În particular, dacă $X = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu Hilbert, atunci, din teorema lui Riesz (teorema 13, cap.1), rezultă egalitatea:

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle|; y \in H, \|y\| = 1\}.$$

Demonstrație Fie $x \in X$ și fie $f \in X'$ astfel încât $\|f\| = 1$.
Din inegalitatea $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| = \|x\|$, rezultă

$$\|x\| \geq \sup\{|f(x)|; f \in X' \text{ și } \|f\| = 1\}.$$

Din corolarul 25, rezultă existența unei funcționale $h_x \in X'$ astfel încât $\|h_x\| = \|x\|$ și $h_x(x) = \|x\|^2$; fie $f_x = \|x\|^{-1} h_x$. Atunci $\|f_x\| = 1$ și $f_x(x) = \|x\|$, ceea ce încheie demonstrația.

27. Observație

Din corolarul 26 rezultă că dacă X, Y sunt spații normate și $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, atunci :

$$\|T\| = \sup\{|g(Tx)|; x \in X, \|x\| \leq 1, g \in Y', \|g\| \leq 1\}.$$

În particular, dacă $X = Y = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu Hilbert, atunci, din teorema lui Riesz, rezultă egalitatea:

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle|; x, y \in H, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

28. Corolar

Fie X un spațiu normat și fie $Y \subset X$ un subspațiu care nu este dens în X , adică $\bar{Y} \neq X$. Atunci există o funcțională neidentică nulă $f \in X'$ astfel încât $f(x) = 0, \forall x \in Y$.

Demonstrație Vom face demonstrația pentru cazul real. Considerăm ca funcțională subliniară distanța la subspațiul Y : $p(x) = \text{dist}(x, Y) = \inf\{\|x - y\|; y \in Y\}$. Evident, $p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{Y}$. Fie $x_o \in X - \bar{Y}$; conform corolarului 19, există $f \in X'$ astfel încât $f(x_o) = p(x_o)$ și $f(x) \leq p(x), \forall x \in X$, ceea ce încheie demonstrația.

Definim în continuare adjunctul unui operator liniar și continuu între două spații Banach.

29. Teoremă

Fie X, Y spații normate. Pentru orice $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ există și este unic $T^* \in \mathcal{L}(Y', X')$ astfel încât $g(Tx) = (T^*g)(x), \forall x \in X, \forall g \in Y'$.

În plus, are loc egalitatea $\|T^*\| = \|T\|$.

În particular, dacă $X = Y = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu Hilbert, atunci, din teorema lui Riesz, rezultă egalitatea:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \forall x, y \in H.$$

Demonstrație Fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$; definim $T^* : Y' \rightarrow X'$, $T^*g = g \circ T$. Pentru orice $x \in X$, avem $(T^*g)(x) = g(Tx)$, ceea ce arată că T^* este unic. Liniaritatea este imediată. Conform observației 27, avem:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{|(T^*g)(x)|; x \in X, \|x\| \leq 1, g \in Y', \|g\| \leq 1\} = \\ &= \sup\{\|T^*g\|; g \in Y', \|g\| \leq 1\} = \|T^*\|. \end{aligned}$$

30. Definiție

Fie X, Y spații normate și fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operatorul $T^* \in \mathcal{L}(Y', X')$ se numește adjunctul operatorului T . Este evident că aplicația $\mathcal{L}(X, Y) \ni T \rightarrow T^* \in \mathcal{L}(Y', X')$ este liniară.

31. Propoziție

Fie X, Y spații Banach și $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Atunci T are imagine densă în Y dacă și numai dacă operatorul T^* este injectiv.

Demonstrație Fie subspațiul $\text{Ker}(T^*) = \{g \in Y'; T^*g = 0\}$; evident, T^* este injectiv dacă și numai dacă $\text{Ker}(T^*) = \{0\}$. Din definiția lui T^* rezultă:

$$\text{Ker}(T^*) = \{g \in Y'; g(Tx) = 0, \forall x \in X\}. \quad (3.9)$$

Din corolarul 28, rezultă că $\text{Im}(T)$ este subspațiu dens în Y dacă și numai dacă:

$$\{g \in Y'; g(Tx) = 0, \forall x \in X\} = \{0\}. \quad (3.10)$$

Din relațiile 3.9 și 3.10 rezultă echivalența cerută.

3.3 Principiul mărginirii uniforme

Este simplu de arătat că limita punctuală (a se vedea observația 11) a unui șir de operatori liniari și continui este un operator liniar; dacă domeniul de definiție al operatorilor este spațiu normat complet, atunci limita (punctuală) este și continuă. Acest rezultat (nebanal) este cunoscut sub numele de Teorema Banach-Steinhaus (sau principiul mărginirii uniforme) și constituie tema paragrafului care urmează.

32. Lema lui Baire

Fie (X, d) un spațiu metric complet și fie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de submulțimi

închise ale lui X cu proprietatea $\text{Int}(A_n) = \emptyset, \forall n \in N$.

Atunci $\text{Int}(\bigcup_{n \in N} A_n) = \emptyset$; (am notat cu $\text{Int}(A)$ interiorul mulțimii A).

Demonstrație Fie, pentru fiecare $n \in N$, $D_n = X - A_n$. Din ipoteză rezultă că pentru fiecare $n \in N$ mulțimea D_n este deschisă și densă în X ; concluzia lemei este echivalentă cu faptul că $\bigcap_{n \in N} D_n$ este densă în X , sau, echivalent, pentru orice mulțime nevidă deschisă $E \subseteq X$, avem $E \cap (\bigcap_{n \in N} D_n) \neq \emptyset$. Fie $E \subseteq X$, E deschisă și nevidă. Fie $x_o \in E$ și fie $r_o > 0$ astfel încât $\overline{B}(x_o, r_o) \subseteq E$. Deoarece D_1 este deschisă și densă în X , putem alege $x_1 \in B(x_o, r_o) \cap D_1$ și $r_1 > 0$ astfel încât $\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq B(x_o, r_o) \cap D_1$ și $r_1 < \frac{r_o}{2}$. Repetând procedeul, obținem două șiruri $(x_n)_n \subset X$ și $(r_n)_n, r_n > 0$, cu proprietățile:

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap D_{n+1} \text{ și } r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \forall n \in N.$$

Din inegalitatea $d(x_{n+p} - x_n) \leq 2^{-n} r_o, \forall n, p \in N$, rezultă că $(x_n)_n$ este șir Cauchy și deci există $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Din construcție, $a \in \overline{B}(x_n, r_n), \forall n \in N$, și deci $a \in E \cap (\bigcap_{n \in N} D_n)$, ceea ce încheie demonstrația.

33. Corolar

Fie (X, d) un spațiu metric complet și fie $(A_n)_{n \in N}$ un șir de submulțimi închise ale lui X astfel încât $\bigcup_{n \in N} A_n = X$; atunci există $p \in N$ astfel încât $\text{Int}(X_p) \neq \emptyset$.

Vom demonstra în continuare rezultatul principal al acestui paragraf.

34. Teorema Banach-Steinhaus (Principiul mărginirii uniforme)

Fie X spațiu Banach, fie Y un spațiu normat și fie $(T_j)_{j \in J}$ o familie de operatori liniari și continui de la X la Y cu proprietatea

$$\sup\{\|T_j x\|; j \in J\} < \infty, \forall x \in X.$$

Atunci:

$$\sup\{\|T_j\|; j \in J\} < \infty.$$

Demonstrație Pentru orice $n \in N$, considerăm mulțimea închisă

$A_n = \{x \in X; \|T_j x\| \leq n, \forall j \in J\}$. Din ipoteză rezultă că

$\bigcup_{n \in N} A_n = X$, și deci conform corolarului 33 există $p \in N$ astfel încât

$\text{Int}(X_p) \neq \emptyset$. Fie $x_p \in X_p$ și $r > 0$ astfel încât $B(x_p, r) \subset X_p$.

Dacă $y \in X$ cu proprietatea $\|y\| < 1$, atunci $x_p + ry \in B(x_p, r)$ și deci

$\|T_j(x_p + ry)\| \leq p, \forall j \in J$. De aici rezultă că pentru orice $j \in J$ și $y \in Y$ cu $\|y\| \leq 1$, avem:

$$| \|T_j x_p\| - r \|T_j y\| | \leq p.$$

Demonstrația se încheie observând că din inegalitatea de mai sus rezultă:

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \|T_j y\| \leq \frac{1}{r}(p + \|T_j x_p\|) < \infty, \forall j \in J.$$

35. Observație

Concluzia teoremei anterioare este echivalentă cu existența unei constante $k > 0$ cu proprietatea :

$$\|T_j x\| \leq k \|x\|, \forall x \in X, \forall j \in J.$$

36. Corolar

Fie X, Y două spații Banach și fie $T_n : X \rightarrow Y$ un șir de operatori liniari și continui cu proprietatea că pentru orice $x \in X$ șirul $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent; notând această limită cu Tx , avem:

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.
- (b) T este operator liniar și continuu.
- (c) $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

Demonstrație Șirul $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ fiind convergent, este mărginit; afirmația (a) rezultă aplicând teorema 34. Este evident că T este liniar; continuitatea rezultă din observația 35. Inegalitatea (c) rezultă din relația $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\|$.

37. Corolar

Fie E un spațiu Banach și fie $A \subseteq E$. Dacă pentru orice $f \in E'$ mulțimea $f(A)$ este mărginită (în C), atunci mulțimea A este mărginită (în spațiul E).

Demonstrație Aplicăm teorema 34, pentru $X = E', Y = C$ și $J = A$. Pentru fiecare $a \in A$, definim $T_a : E' \rightarrow C, T_a f = f(a)$; din ipoteză rezultă că pentru orice $f \in E'$ avem $\sup_{a \in A} |T_a f| < \infty$. Conform observației 35, există $k > 0$ astfel încât:

$$|T_a f| \leq k \|f\|, \forall f \in E', \forall a \in A,$$

și deci $\|T_a\| \leq k$. Pe de altă parte, din corolarul 26, avem $\|a\| = \sup\{|f(a)|; f \in E', \|f\| \leq 1\}$, ceea ce încheie demonstrația.

38. Corolar

Fie E un spațiu Banach și fie $A \subseteq E'$ cu proprietatea că pentru orice $x \in E$ mulțimea $\{f(x); f \in A\}$ este mărginită în C .

Atunci mulțimea A este mărginită (în spațiul normat E').

Demonstrație Aplicăm teorema 34 pentru $X = E$, $Y = C$ și $J = A$; pentru orice $f \in A$, definim $T_f : E \rightarrow C$, $T_f x = f(x)$. Aplicând observația 35 familiei $(T_f)_{f \in J}$, demonstrația se încheie.

3.4 Teorema aplicației deschise și teorema graficului închis

În acest paragraf sunt prezentate teoremele aplicației deschise și cea a graficului închis. Prima are drept consecință remarcabilă continuitatea inversului unui operator liniar continuu bijectiv între două spații Banach, iar a doua dă o condiție echivalentă cu continuitatea.

39. Teorema aplicației deschise

Fie X, Y două spații Banach și fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dacă T este surjectiv, atunci există $k > 0$ astfel încât $\sup_{\|x\| < 1} \|Tx\| \geq k$.

Concluzia teoremei mai poate fi scrisă sub forma echivalentă:

$$\{y \in Y; \|y\| < k\} \subseteq \{Tx; x \in X, \|x\| < 1\}.$$

Demonstrație Fie $B_X(0, 1)$ bila unitate deschisă din X ; demonstrăm mai întâi că există $k > 0$ astfel încât:

$$\overline{T(B_X(0, 1))} \supset B_Y(0, 2k). \quad (3.11)$$

Pentru aceasta, fie $X_n = \overline{nT(B_X(0, 1))}$; deoarece T este surjectiv, rezultă că $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = Y$ și deci, aplicând lema lui Baire (lema 32) rezultă $\text{Int}(\overline{T(B_X(0, 1))}) \neq \emptyset$. Putem alege deci $k > 0$ și $y_o \in Y$ astfel încât:

$$B_Y(y_o, 4k) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}. \quad (3.12)$$

În particular, $y_o \in \overline{T(B_X(0, 1))}$, deci există un șir $(x_n)_n \subset B_X(0, 1)$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y_o$; în concluzie:

$$-y_o = \lim_{n \rightarrow \infty} T(-x_n) \in \overline{T(B_X(0, 1))}. \quad (3.13)$$

Din relațiile 3.12 și 3.13 rezultă (prin adunare):

$$B_Y(0, 1) \subset \overline{T(B_X(0, 1))} + \overline{T(B_X(0, 1))}. \quad (3.14)$$

Demonstrăm acum

$$\overline{T(B_X(0, 1))} + \overline{T(B_X(0, 1))} = \overline{2T(B_X(0, 1))}; \quad (3.15)$$

pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că $\overline{T(B_X(0, 1))}$ este mulțime convexă. Fie $\lambda \in [0, 1]$ și $x, y \in B_X(0, 1)$; avem:

$$\| \lambda x + (1 - \lambda)y \| \leq \lambda \| x \| + (1 - \lambda) \| y \| < \lambda + (1 - \lambda) = 1$$

și deci $\lambda Tx + (1 - \lambda)Ty = T(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in T(B_X(0, 1))$.

Din relațiile 3.14 și 3.15 rezultă incluziunea 3.11.

Demonstrăm în continuare incluziunea $T(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, k)$, ceea ce, evident, încheie demonstrația. Fie $y \in B_Y(0, k)$; vom construi $x \in B_X(0, 1)$ astfel încât $Tx = y$. Din incluziunea 3.11, rezultă $y \in \overline{T(B_X(0, \frac{1}{2}))}$, deci:

$$\forall \epsilon > 0, \exists z \in B_X(0, \frac{1}{2}) \text{ astfel încât } \| y - Tz \| < \epsilon. \quad (3.16)$$

În particular pentru $\epsilon = \frac{k}{2}$, există $z_1 \in X$ cu proprietățile:

$$\| z_1 \| < \frac{1}{2} \text{ și } \| y - Tz_1 \| < \frac{k}{2}.$$

Fie acum elementul $y - Tz_1 \in B_X(0, k)$. Repetând raționamentul aplicat lui y și luând în relația 3.16 $\epsilon = \frac{k}{4}$, rezultă că există $z_2 \in X$ cu proprietățile:

$$\| z_2 \| < 2^{-2} \text{ și } \| (y - Tz_1) - Tz_2 \| < 2^{-2}k.$$

Repetând procedeul, construim un șir $(z_n)_n \subset X$ cu proprietățile:

$$\| z_n \| < 2^{-n} \text{ și } \| y - T(z_1 + z_2 + \dots + z_n) \| < 2^{-n}k, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.17)$$

Rezultă că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n$ este absolut convergentă și deci (deoarece X este spațiu Banach) este și convergentă; fie $x \in X$ suma acestei serii. Din relația 3.17 rezultă că $x \in B_X(0, 1)$ și $Tx = y$, ceea ce încheie demonstrația.

Teorema 39 are numeroase aplicații; prezentăm în continuare câteva consecințe utilizate frecvent.

40. Corolar

Fie X, Y și T ca în teorema anterioară. Atunci, imaginea prin T a oricărei

mulțimi deschise din X este mulțime deschisă în Y ; o aplicație cu această proprietate se numește **aplicație deschisă**, ceea ce dă și numele teoremei 39: teorema aplicației deschise.

Demonstrație Fie $D \subseteq X$ o mulțime deschisă și fie $y \in T(D)$. Fie $x \in D$ astfel încât $y = Tx$. Mulțimea D fiind deschisă, există $r > 0$ astfel încât $B_X(x, r) \subset D$, sau, echivalent, $x + B_X(0, r) \subset D$. Aplicând T ultimei incluziuni, obținem $y + T(B_X(0, r)) \subset T(D)$. Conform teoremei 39, există $k > 0$ astfel încât $T(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, k)$, sau, echivalent, $T(B_X(0, r)) \supset B_Y(0, rk)$. Adunând în ambii membri ai ultimei incluziuni y , rezultă $B_Y(y, rk) \subset y + T(B_X(0, r)) \subset T(D)$, ceea ce încheie demonstrația.

41. Corolar (Teorema lui Banach)

Fie X, Y două spații Banach și $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dacă T este operator bijectiv, atunci $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Acest rezultat fundamental se numește teorema lui Banach.

Demonstrație Fie $0 \neq x \in X$ și fie $y = \|x\|^{-1} x$. Din teorema 39 rezultă că există $k > 0$ astfel încât $\|Ty\| \geq k$ și deci $\|Tx\| \geq k\|x\|$; din propoziția 13 rezultă că operatorul T^{-1} este continuu, ceea ce încheie demonstrația.

42. Corolar

Fie X un spațiu vectorial și fie $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_2$ două norme pe X . Dacă $(X, \|\cdot\|_1)$ și $(X, \|\cdot\|_2)$ sunt spații Banach și dacă există $c > 0$ astfel încât $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$, pentru orice $x \in X$, atunci există $k > 0$ astfel încât $\|x\|_1 \leq k\|x\|_2$. Rezultă deci că cele două norme sunt echivalente (cf. definiției 1, cap. 1).

Demonstrație Aplicăm corolarul 41 astfel:

$X = (X, \|\cdot\|_1)$, $Y = (X, \|\cdot\|_2)$ și $T = I$.

43. Definiție

Fie X, Y două spații normate și fie $T : X \rightarrow Y$.

Mulțimea $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) ; x \in X\}$ se numește graficul lui T .

Operatorul T se numește închis dacă graficul său este mulțime închisă (în $X \times Y$). Menționăm că mulțimea $X \times Y$ este spațiu topologic cu topologia produs ([3], p. 111); o normă care definește topologia produs este $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

O bază de vecinătăți ale unui punct $(x, y) \in X \times Y$ este formată din toate mulțimile de tipul $U \times V$, unde, $U \subseteq X$ este vecinătate a lui x iar $V \subseteq Y$ este vecinătate a lui y . Vom folosi în continuare următorul rezultat (teorema lui Tihonov):

Dacă X și Y sunt spații compacte, atunci $X \times Y$ este de asemenea spațiu compact; pentru demonstrație și alte completări în legătură cu topologia produs, recomandăm [3], p. 116.

44. Observație

(a) T este operator închis dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_n)_n \subset X$ cu proprietățile:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y,$

rezultă $y = Tx$.

(b) Evident, orice operator continuu este închis; să mai observăm că în cazul unui operator continuu, ipoteza (ii) de mai sus face parte din concluzie.

(c) Reciproca afirmației (b) este, în general, falsă, după cum arată următorul exemplu, pe care-l propunem ca exercițiu.

Fie $X = \{f : [0, 1] \rightarrow C; f \text{ de clasă } C^1\}$, $Y = \{f : [0, 1] \rightarrow C; f \text{ continuă}\}$ și fie $T : X \rightarrow Y$, $Tf = f'$ (derivata). Norma pe spațiile X și Y este norma supremum: $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Atunci T este operator liniar închis, dar nu este continuu.

Are loc, totuși, următorul rezultat remarcabil.

45. Teorema graficului închis

Fie $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ doua spații Banach și fie $T : X \rightarrow Y$ un operator liniar și închis. Atunci T este continuu.

În exemplul 44 spațiul X nu este complet.

Demonstrație Vom folosi corolarul 42. Considerăm pe X următoarele două norme: $\|x\|_3 = \|x\|_1 + \|Tx\|_2$ și $\|x\|_4 = \|x\|_1$. Din ipoteză, $(X, \|\cdot\|_4)$ este spațiu Banach. Este evident că $\|x\|_4 \leq \|x\|_3$; pentru a aplica corolarul 42 mai trebuie demonstrat că $(X, \|\cdot\|_3)$ este spațiu Banach. Fie $(x_n)_n$ un șir Cauchy în $(X, \|\cdot\|_3)$; atunci $(x_n)_n$ este șir Cauchy în $\|\cdot\|_1$ și $(Tx_n)_n$ este șir Cauchy în $\|\cdot\|_2$. Rezultă că există $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (în norma $\|\cdot\|_1$) și $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$ (în norma $\|\cdot\|_2$). Deoarece T este operator închis, rezultă că $y = Tx$, ceea ce arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_3 = 0$. Aplicând corolarul 42, rezultă că există $k > 0$ astfel încât $\|x\|_3 \leq k \|x\|_4$, adică $\|Tx\|_2 \leq (k - 1) \|x\|_3$, ceea ce arată că T este operator continuu.

3.5 Topologia slabă și teorema lui Alaoglu

Un rezultat clasic de analiză (teorema lui Riesz: [3], p.193) afirmă că bila unitate închisă dintr-un spațiu normat este compactă dacă și numai dacă dimensiunea spațiului este finită. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach infinit dimensional și fie X' dualul său (care este și el infinit dimensional). Am văzut

că împreună cu norma $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$, X' este spațiu Banach; conform rezultatului menționat mai sus, rezultă că bila unitate închisă din X' , pe care o vom nota $\overline{B_{X'}}(0, 1)$, nu este mulțime compactă. În acest paragraf vom arăta că există o topologie pe X' , (numită topologia slabă a dualului) în care $\overline{B_{X'}}(0, 1)$ este mulțime compactă.

46. Definiție (topologia slabă a dualului unui spațiu Banach)

În cele ce urmează, vom prezenta, pe scurt, topologia slabă definită pe dualul unui spațiu Banach. Pentru demonstrații și completări, recomandăm [4], p.46 și p.120.

Fie X un spațiu normat și fie X' dualul său; pentru orice $x \in X$ definim seminorma $p_x : X' \rightarrow \mathbb{C}$, $p_x(f) = f(x)$. Familia de seminorme $\mathcal{P} = \{p_x\}_{x \in X}$ separă punctele lui X' , în sensul că pentru orice $0 \neq x \in X$, există $p \in \mathcal{P}$ astfel încât $p(x) \neq 0$.

O vecinătate a unui element $f \in X'$ se definește după cum urmează. Fie $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ o mulțime finită de seminorme și fie, pentru orice $\epsilon > 0$:

$$W(f, \mathcal{R}, \epsilon) = \{g \in X' ; |p(g) - p(f)| < \epsilon, \forall p \in \mathcal{R}\}.$$

O bază de vecinătăți ale elementului $f \in X'$ este

$$\{W(f, \mathcal{R}, \epsilon) ; \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}, \mathcal{R} \text{ finită}, \epsilon > 0\}.$$

Topologia definită pe X' de vecinătățile de mai sus se numește topologia slabă a dualului; vom nota această topologie cu w^* .

Un șir $(f_n)_n \subset X'$ converge la $f \in X'$ în topologia slabă dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiții:

- (i) Șirul $(\|f_n\|)_n$ este mărginit.
- (ii) Există o submulțime $A \subseteq X$ cu pentru care subspațiul liniar generat este dens în X și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in A.$$

O submulțime $\mathcal{F} \subseteq X'$ este w^* -deschisă dacă pentru orice $f \in \mathcal{F}$ există o submulțime finită $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ și $\epsilon > 0$ astfel încât

$$W(f, \mathcal{R}, \epsilon) \subseteq \mathcal{F}.$$

47. Teorema lui Alaoglu

Fie X un spațiu normat; atunci $\overline{B_{X'}}(0, 1)$ este mulțime compactă în topologia w^* .

Demonstrație Fie, pentru orice $x \in \overline{B_X}(0, 1)$, mulțimea:

$C_x = \{\lambda \in C; |\lambda| \leq 1\}$. Cu topologia uzuală, C_x este multime compactă pentru orice $x \in \overline{B_X}(0, 1)$ și deci, (în baza teoremei lui Tihonov: a se vedea definiția 43 sau [3], p.116) și produsul cartezian $\prod_{x \in \overline{B_X}(0, 1)} C_x$ este compact.

Pentru orice $f \in \overline{B_{X'}}(0, 1)$, notăm cu \check{f} restricția lui f la bila unitate închisă din X . Deoarece $|\check{f}(x)| \leq \|x\| \leq 1$, putem considera că

$$\check{f} \in \prod_{x \in \overline{B_X}(0, 1)} C_x;$$

aceasta se poate identificând pe \check{f} cu mulțimea valorilor sale, care este:

$$\{\check{f}(x); x \in \overline{B_X}(0, 1)\}.$$

Fie $F : \overline{B_{X'}}(0, 1) \rightarrow \prod_{x \in \overline{B_X}(0, 1)} C_x$, $F(f) = \check{f}$. Se demonstrează fără dificultate că F este injectivă și continuă.

Am identificat astfel $\overline{B_{X'}}(0, 1)$ cu o submulțime dintr-un spațiu compact; deoarece o submulțime închisă inclusă într-una compactă este și ea compactă, ([3], p.102), rezultă că este suficient să demonstrăm că $\overline{B_{X'}}(0, 1)$ este submulțime w^* -închisă.

Pentru aceasta, să notăm cu \mathcal{B} închiderea lui $\overline{B_{X'}}(0, 1)$ în topologia w^* și fie $f \in \mathcal{B}$. Pentru a arăta că $f \in \overline{B_{X'}}(0, 1)$, trebuie să arătăm că f este liniară și $\|f\| \leq 1$. Pentru liniaritate, fie $x, y \in X$ și $\alpha, \beta \in C$; fie $\epsilon > 0$ arbitrar și fie mulțimea:

$$W = \{g \in X'; |g(z) - f(z)| < \epsilon, \forall z \in \{x, y, \alpha x + \beta y\}\}.$$

Deoarece W este vecinătate a lui f , (în topologia w^*), rezultă că

$$W \cap \overline{B_{X'}}(0, 1) \neq \emptyset.$$

Fie h un element în această intersecție. Deoarece h este liniară, rezultă:

$$\begin{aligned} & |f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)| \leq \\ & \leq |f(\alpha x + \beta y) - h(\alpha x + \beta y)| + \\ & + |\alpha| |h(x) - f(x)| + |\beta| |h(y) - f(y)| \leq (1 + |\alpha| + |\beta|)\epsilon, \end{aligned}$$

și deci (deoarece ϵ a fost arbitrar), f este liniară.

Pentru a demonstra inegalitatea $\|f\| \leq 1$, fie $x \in X$ și $\epsilon > 0$ arbitrar; deoarece mulțimea

$$V = \{g \in X; |g(x) - f(x)| < \epsilon\}$$

este o vecinătate a lui f în topologia w^* , rezultă că există $h \in V \cap \overline{B_{X'}(0, 1)}$, și deci:

$$|f(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x)| < \epsilon + \|x\|.$$

Deoarece ϵ a fost arbitrar, rezultă că $\|f\| \leq 1$, deci $f \in \overline{B_{X'}(0, 1)}$, ceea ce încheie demonstrația.

Capitolul 4

Algebre Banach

4.1 Rezultate generale din teoria algebrelor Banach

În acest paragraf vom prezenta noțiuni și rezultate generale din teoria algebrelor Banach; tot aici vom da și o listă cu principalele exemple de algebre Banach pe care le vom cita frecvent în restul lucrării.

1. Definiție

Fie \mathcal{A} un spațiu vectorial complex. \mathcal{A} se numește **algebră** dacă există o operație (numită **produs** sau **înmulțire**) pe \mathcal{A} cu proprietățile:

(i) $x(yz) = (xy)z, \forall x, y, z \in \mathcal{A}$, (asociativă).

(ii) $(x + y)z = xz + yz$ și $x(y + z) = xy + xz$,

$\forall x, y, z \in \mathcal{A}$, (distributivă față de adunare).

(iii) $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y, \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in \mathcal{A}$.

O **algebră normată** este o algebră \mathcal{A} pe care s-a definit o normă $\| \cdot \|$ cu proprietatea:

(iv) $\| xy \| \leq \| x \| \| y \|, \forall x, y \in \mathcal{A}$.

Dacă în plus spațiul normat $(\mathcal{A}, \| \cdot \|)$ este complet, atunci $(\mathcal{A}, \| \cdot \|)$ se numește **algebră Banach** (sau **algebră normată completă**).

Din condiția (iv) rezultă că produsul este operație continuă, deci pentru orice șiruri $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ din \mathcal{A} care converg la x și respectiv la y , rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = xy$.

O algebră normată \mathcal{A} se numește **comutativă** dacă produsul este operație comutativă: $xy = yx, \forall x, y \in \mathcal{A}$. Dacă înmulțirea are un element neutru, e , (dacă există, el este unic), atunci \mathcal{A} se numește **algebră normată cu unitate**; dacă în plus $\| e \| = 1$, atunci algebra se numește **unitară**. Un subspațiu vectorial $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ se numește **subalgebră** dacă pen-

tru orice $x, y \in \mathcal{B}$, rezultă $xy \in \mathcal{B}$. Ca și în cazul subspațiilor vectoriale, o subalgebră a unei algebre Banach este completă dacă și numai dacă este închisă. Fie \mathcal{A}_1 și \mathcal{A}_2 două algebre normate. O aplicație $F : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ se numește **morfism de algebre** dacă F este liniară și multiplicativă (adică $F(xy) = F(x)F(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}_1$). Un morfism bijectiv se numește **izomorfism**. Două algebre normate \mathcal{A}_1 și \mathcal{A}_2 se numesc **izomorfe** dacă între ele există un **izomorfism izometric**, adică $\|F(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathcal{A}_1$.

2.Exemple

(i) Cu operațiile uzuale, mulțimea numerelor complexe este algebră Banach comutativă unitară.

(ii) Algebra $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \|\cdot\|_\infty)$

Spațiul Banach $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \|\cdot\|_\infty)$ din exemplul 4(v),cap.1 se organizează ca algebră Banach comutativă unitară cu produsul $(fg)(t) = f(t)g(t)$, elementul neutru fiind funcția constantă $\mathbf{1}$. Reamintim în continuare **teorema clasică a lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcțiilor continue prin polinoame**. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și fie $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$; menționăm că spațiul metric $[a, b]$ este subînțeles cu topologia sa naturală, ca subspațiu în spațiul metric \mathbb{R} . Teorema clasică a lui Weierstrass ([8],p.326; [14],p.147) afirmă că pentru orice funcție continuă $f \in \mathcal{C}([a, b])$ există un șir de polinoame $P_n \in \mathcal{C}[X]$ care converge uniform la f pe intervalul $[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n\|_\infty = 0.$$

Dacă facem acum observația că mulțimea polinoamelor cu coeficienți complecși (restricționate la intervalul $[a, b]$) este o subalgebră în algebra $\mathcal{C}([a, b], \|\cdot\|_\infty)$, atunci teorema lui Weierstrass se poate reformula astfel:

Subalgebra polinoamelor $\mathcal{C}[X]$, (restricționate la $[a, b]$) este densă în algebra $\mathcal{C}([a, b])$.

Vom enunța în continuare o generalizare (în cadrul teoriei algebrelor Banach) a acestui rezultat clasic, numită teorema Weierstrass-Stone (pentru demonstrație se pot consulta: [14],p.150; [4],p.206; [5],p.46).

Fie \mathcal{D} un spațiu topologic compact ([3],p.99) și fie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{D})$ o subalgebră; \mathcal{B} se numește **închisă la conjugare** dacă pentru orice $f \in \mathcal{B}$ rezultă $\overline{f} \in \mathcal{B}$. Spunem că \mathcal{B} **separă punctele lui \mathcal{D}** dacă pentru orice $t, s \in \mathcal{D}$, $t \neq s$, există $f \in \mathcal{B}$ astfel încât $f(t) \neq f(s)$. Dacă pentru orice $t \in \mathcal{D}$ există $f \in \mathcal{D}$ astfel încât $f(t) \neq 0$, atunci se spune că \mathcal{B} **nu se anulează pe \mathcal{D}** . Cu aceste definiții precizate, putem enunța **teorema Weierstrass-Stone**:

Fie \mathcal{B} o subalgebră în $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \|\cdot\|_\infty)$; dacă \mathcal{B} este închisă la conjugare,

separă punctele lui \mathcal{D} și nu se anulează pe \mathcal{D} , atunci \mathcal{B} este densă în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D})$.

În cazul în care considerăm numai funcții continue cu valori reale, atunci ipoteza ca \mathcal{B} să fie închisă la conjugare nu mai este necesară; facem de asemenea observația că ipoteza ca \mathcal{B} să nu se anuleze pe \mathcal{D} poate fi înlocuită cu ipoteza ca \mathcal{B} să conțină funcțiile constante (este suficient să conțină funcția constantă $\mathbf{1}$). Evident, teorema clasică a lui Weierstrass se obține în cazul particular: $\mathcal{D} = [a, b]$ și $\mathcal{B} = C[X]$.

(iii) Algebra $(\ell^\infty(Z), \|\cdot\|_\infty)$

Spațiul Banach al șirurilor mărginite $(\ell^\infty(Z), \|\cdot\|_\infty)$, (cf. exemplului 4(iii), cap.1) este algebră Banach comutativă unitară cu produsul:

$$(xy)(n) = x(n)y(n), \forall n \in Z,$$

având ca element neutru șirul constant $\mathbf{1}$.

(iv) Algebra $\mathcal{L}(X)$

Fie X un spațiu Banach; atunci spațiul Banach al operatorilor liniari și continui pe X , $\mathcal{L}(X)$, este algebră Banach (necomutativă) unitară, înmulțirea fiind produsul (compunerea) operatorilor, iar elementul neutru operatorul identic (a se vedea cap.3, teoremele 5,7 și 12).

(v) Algebra $(L^\infty(\Omega, \mu), \|\cdot\|_\infty)$

Spațiul Banach al funcțiilor esențial mărginite, $L^\infty(\Omega, \mu)$ (cf. exemplului 4(vi), cap.1) este algebră Banach comutativă unitară cu produsul $(fg)(t) = f(t)g(t)$, elementul neutru fiind funcția constantă $\mathbf{1}$. În particular, $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ și $L^\infty(\mathbb{R})$ sunt algebre Banach comutative unitare. Definim în continuare o subalgebră remarcabilă a lui $L^\infty(\mathcal{S}^1)$. Deoarece \mathcal{S}^1 este mulțime compactă (și prin urmare măsura Lebesgue este finită) rezultă că orice funcție esențial mărginită pe \mathcal{S}^1 este de pătrat integrabil. Deci pentru orice $f \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, putem defini coeficienții săi Fourier, $\hat{f}(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (cf. teoremei 19, cap.1). Fie $H^\infty(\mathcal{S}^1) = \{f \in L^\infty(\mathcal{S}^1); \hat{f}(n) = 0, \forall n < 0\}$. Se demonstrează că $H^\infty(\mathcal{S}^1)$ este subalgebră închisă în $L^\infty(\mathcal{S}^1)$. Elementele subalgebrei (Banach) $H^\infty(\mathcal{S}^1)$ se numesc funcții analitice esențial mărginite ([11], p.159).

(vi) Algebra $\ell^1(Z)$

Fie spațiul Banach $(\ell^1(Z), \|\cdot\|_1)$ (cf. exemplului 4(ii), cap.1). Pentru orice $x, y \in \ell^1(Z)$ definim **convoluția** lui x cu y prin:

$$(x \star y)(n) = \sum_{k \in Z} x(n-k)y(k), \forall n \in Z.$$

Șirul $x \star y \in \ell^1(Z)$ deoarece:

$$\begin{aligned} \|x \star y\|_1 &= \sum_{n \in Z} \left| \sum_{k \in Z} x(n-k)y(k) \right| \leq \sum_{n \in Z} \sum_{k \in Z} |x(n-k)y(k)| = \\ &= \sum_{k \in Z} |y(k)| \sum_{m \in Z} |x(m)| = \|x\|_1 \|y\|_1, \quad \forall x, y \in \ell^1(Z). \end{aligned}$$

Produsul de convoluție astfel definit este comutativ, asociativ și distributiv față de adunarea șirurilor. Din egalitatea (imediată):

$(x \star \sigma_k)(n) = x(n-k)$, $\forall n \in Z$, rezultă că σ_o este element neutru pentru convoluția șirurilor. Pentru demonstrații cât și pentru alte proprietăți și aplicații ale convoluției se pot consulta [1],p.518; [15],p.104; [5],p.54.

(vii) Algebra $L^1(R)$

În spațiul Banach $L^1(R)$ (cf. exemplului 4(iv),cap.1) produsul de **convoluție** (al funcțiilor) este definit prin:

$$(f \star g)(t) = \int_R f(t-s)g(s)ds.$$

Se demonstrează că integrala de mai sus converge aproape pentru orice $t \in R$ și $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, adică $f \star g \in L^1(R)$. Operația astfel definită este comutativă, asociativă și distributivă față de adunarea funcțiilor; convoluția funcțiilor (spre deosebire de convoluția șirurilor) nu admite element neutru. În concluzie, $L^1(R)$ este o algebră Banach comutativă fără unitate; bibliografie: [17],p.49; [4],p.196; [13],p.146.

În algebrele normate cu unitate, elementele inversabile au proprietăți remarcabile.

3.Definiție

Fie \mathcal{A} o algebră normată cu unitatea e . Un element $x \in \mathcal{A}$ se numește **inversabil** dacă există $y \in \mathcal{A}$ astfel încât $xy = yx = e$; în această situație, y se numește **inversul** lui x și se notează x^{-1} (dacă există, el este unic). Notăm cu $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ mulțimea elementelor inversabile ale algebrei \mathcal{A} . Este ușor de demonstrat că $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ este grup (cu operația de înmulțire) și $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. O algebră normată în care toate elementele nenule sunt inversabile se numește **corp normat**.

4.Propoziție

Fie \mathcal{A} o algebră Banach unitară. Atunci, pentru orice $x \in \mathcal{A}$ cu proprietatea

$\|x\| < 1$ rezultă că elementul $e - x$ este inversabil și inversul său este:

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} x^n.$$

Demonstrație Fie $x \in \mathcal{A}$, $\|x\| < 1$. Arătăm mai întâi că seria $\sum_{n \geq 0} x^n$ este absolut convergentă (și deci și convergentă deoarece \mathcal{A} este completă). Folosind inegalitatea $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, (care rezultă direct din definiția algebrei normate), avem:

$$\sum_{n \geq 0} \|x^n\| \leq \sum_{n \geq 0} \|x\|^n = (1 - \|x\|)^{-1} < \infty.$$

Rezultă că șirul $s_n = \sum_{k=0}^n x^k$ este convergent; din egalitatea

$$(e - x)s_n = s_n(e - x) = e - x^{n+1},$$

pentru $n \rightarrow \infty$, rezultă (folosind și faptul că $x^{n+1} \rightarrow 0$) concluzia propoziției. Din demonstrație rezultă și inegalitatea

$$\|(e - x)^{-1}\| \leq (1 - \|x\|)^{-1}, \forall x \in \mathcal{A}, \|x\| < 1.$$

5. Propoziție

Într-o algebră Banach unitară mulțimea elementelor inversabile este deschisă.

Demonstrație Fie \mathcal{A} o algebră Banach unitară și fie $a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$.

Vom arăta incluziunea:

$$B(a, \|a^{-1}\|^{-1}) \subset \mathcal{G}(\mathcal{A}),$$

ceea ce va încheia demonstrația.

Fie $x \in B(a, \|a^{-1}\|^{-1})$; avem:

$$\begin{aligned} \|e - a^{-1}x\| &= \|a^{-1}a - a^{-1}x\| = \|a^{-1}(a - x)\| \leq \\ &\leq \|a^{-1}\| \|a - x\| < \|a^{-1}\| \|a^{-1}\|^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Conform propoziției 4, rezultă că elementul $e - (e - a^{-1}x) = a^{-1}x$ este inversabil și deci și x este inversabil, fiind produs de elemente inversabile: $x = a(a^{-1}x)$.

6. Propoziție

Fie \mathcal{A} o algebră Banach unitară.

Atunci aplicația $\mathcal{G}(\mathcal{A}) \ni x \rightarrow x^{-1} \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ este continuă.

Demonstrație Arătăm mai întâi că aplicația $x \rightarrow x^{-1}$ este continuă în $x = e$:

$$\|x^{-1} - e\| = \|x^{-1}(e - x)\| \leq \|x^{-1}\| \|e - x\| \leq \frac{\|e - x\|}{1 - \|e - x\|}.$$

Fie acum $a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, arbitrar fixat; atunci, pentru orice $x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, avem $x^{-1} = a^{-1}(xa^{-1})^{-1}$ și deci :

$$\begin{aligned} \|x^{-1} - a^{-1}\| &= \|a^{-1}(xa^{-1})^{-1} - a^{-1}\| = \\ &= \|a^{-1}[(xa^{-1})^{-1} - e]\| \leq \|a^{-1}\| \|(xa^{-1})^{-1} - e\|. \end{aligned}$$

Deoarece aplicația $x \rightarrow xa^{-1}$ este continuă (cf. definiției 1), iar aplicația $y \rightarrow y^{-1}$ este continuă în e (cf. celor demonstrate mai sus), demonstrația se încheie.

7. Definiție (spectrul)

Fie \mathcal{A} o algebră normată unitară și fie $x \in \mathcal{A}$; mulțimea

$$\sigma(x) = \{\lambda \in C; \lambda e - x \text{ nu este inversabil}\}$$

se numește **spectrul** lui x . Complementara spectrului se numește mulțimea **rezolventă**: $\rho(x) = C - \sigma(x)$. Dacă $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ este o subalgebră și dacă $x \in \mathcal{B}$, atunci definim

$$\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \{\lambda \in C; \lambda e - x \text{ nu are invers în algebra } \mathcal{B}\};$$

numim $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ spectrul în algebra \mathcal{B} al elementului x . Incluziunea $\sigma(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ este evidentă (în general, ea este strictă).

8. Observație

Fie \mathcal{A} o algebră normată unitară și fie $a \in \mathcal{A}$ un element inversabil. Atunci $\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1}; \lambda \in \sigma(a)\}$.

Demonstrație Fie $\lambda \in \rho(a)$, $\lambda \neq 0$; elementul $(\lambda e - a)^{-1}$ (care există) comută cu a și deci avem:

$$e = (\lambda e - a)(\lambda e - a)^{-1} = (a^{-1} - \lambda^{-1}e)(\lambda e - a)^{-1}\lambda a,$$

ceea ce arată elementul $\lambda^{-1}e - a^{-1}$ este inversabil, deci $\lambda^{-1} \in \rho(a^{-1})$; restul raționamentelor le propunem ca exercițiu.

9.Exemple

(i) În algebra (corpul) Banach al numerelor complexe, orice element nenul este inversabil și deci $\sigma(x) = \{x\}$, $\forall x \in C$.

(ii) Să considerăm algebra Banach a funcțiilor continue, $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \|\cdot\|_\infty)$ (cf. exemplului 2(ii)) și fie $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$. Demonstrăm în continuare egalitatea

$$\sigma(f) = \{f(t); t \in \mathcal{D}\}.$$

Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că funcția f este inversabilă (în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D})$) dacă și numai dacă $f(t) \neq 0, \forall t \in \mathcal{D}$. Dacă f este inversabilă, atunci există $g \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ astfel încât $f(t)g(t) = 1, \forall t \in \mathcal{D}$ și deci $f(t) \neq 0, \forall t \in \mathcal{D}$. Reciproc, dacă $f(t) \neq 0, \forall t \in \mathcal{D}$, atunci putem defini funcția continuă $g(t) = \frac{1}{f(t)}$, ceea ce încheie demonstrația.

(iii) Fie $\mathcal{L}(C^n)$ algebra Banach a operatorilor liniari și continui pe C^n și fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$. În capitolul 1 (paragraful 1) am demonstrat:

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \{\lambda \in C; \lambda I - T \text{ nu este injectiv}\} = \\ &= \{\lambda \in C; \lambda I - T \text{ nu este surjectiv}\} = \\ &= \{\lambda \in C; \exists x \in C^n, x \neq 0 \text{ astfel încât } Tx = \lambda x\}. \end{aligned}$$

Mulțimea $\sigma(T)$ este în acest caz finită și elementele ei (care se numesc valorile proprii ale lui T) sunt rădăcinile polinomului caracteristic asociat matricii operatorului T (într-o bază oarecare).

(iv) Fie X un spațiu Banach infinit dimensional și fie $T \in \mathcal{L}(X)$. Din teorema lui Banach (corolarul 41, cap.3) rezultă că:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C; \lambda I - T \text{ nu este bijectiv}\}.$$

(v) Să calculăm acum spectrul unui element $x \in (\ell^\infty(Z), \|\cdot\|_\infty)$, (cf. exemplului 2(iii)). Fie $\lambda \in C$ astfel încât $\lambda - x$ este inversabil; există deci $y \in \ell^\infty(Z)$ astfel încât $\lambda - x(n) = (y(n))^{-1}, \forall n \in Z$. De aici rezultă inegalitatea $|\lambda - x(n)| \geq (\|y\|_\infty)^{-1} > 0$ și deci am demonstrat implicația:

$$\lambda \in \rho(x) \Rightarrow \exists M > 0 \text{ astfel încât } |x(n) - \lambda| \geq M, \forall n \in Z.$$

Reciproc, fie $\lambda \in C$ astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea $|x(n) - \lambda| \geq M, \forall n \in Z$; considerăm șirul $y(n) = (x(n) - \lambda)^{-1}, \forall n \in Z$. Evident, $y(x - \lambda) = 1$ și $y \in \ell^\infty(Z)$, deoarece $\|y\|_\infty \leq M^{-1} < \infty$. Am demonstrat deci egalitatea:

$$\rho(x) = \{\lambda \in C; \exists M > 0 \text{ astfel încât } |x(n) - \lambda| \geq M\},$$

sau, echivalent, luând complementarele mulțimilor de mai sus:

$$\sigma(x) = \overline{\{x(n); n \in \mathbb{Z}\}}.$$

(vi) Pentru a calcula spectrul unei funcții φ din algebra $(L^\infty(\Omega, \mu), \|\cdot\|_\infty)$, (cf. exemplului 2(v)) introducem mai întâi noțiunea de imagine esențială ([8],p.261; [5],p.57):

$$\text{essran}(\varphi) = \{\lambda \in C; \mu(\{t \in \Omega; |\varphi(t) - \lambda| < \epsilon\}) > 0, \forall \epsilon > 0\}.$$

Se demonstrează că imaginea esențială este mulțime închisă și mărginită (deci compactă în C) și $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \text{essran}(\varphi)\}$, ([5],p.57).

Demonstrăm în continuare că spectrul unei funcții esențial mărginite este egal cu imaginea esențială a funcției. Fie $\lambda \in \rho(\varphi)$; atunci funcția $(\varphi - \lambda)^{-1}$ este esențial mărginită și deci:

$$\mu\left(\left\{t \in \Omega; |\varphi(t) - \lambda| < \frac{1}{2} \|\varphi - \lambda\|_\infty\right\}\right) = 0,$$

adică $\lambda \in C - \text{essran}(\varphi)$. Invers, dacă $\lambda \in C - \text{essran}(\varphi)$ rezultă că există $\epsilon > 0$ astfel încât $\mu(\{t \in \Omega; |\varphi(t) - \lambda| < \epsilon\}) = 0$; de aici rezultă inegalitatea $\|\frac{1}{\varphi - \lambda}\|_\infty \leq \epsilon^{-1}$, deci funcția $\frac{1}{\varphi - \lambda}$ este esențial mărginită, ceea ce arată că $\varphi - \lambda$ este inversabilă, adică $\lambda \in \rho(\varphi)$.

Să reținem că în cursul demonstrației am arătat că o funcție $\varphi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ este inversabilă dacă și numai dacă există $m > 0$ astfel încât $|\varphi(t)| \geq m, \forall t \in \Omega$ (μ - a.p.t.). În cazul în care Ω este un spațiu topologic separat, iar μ este o măsură boreliană regulată, atunci imaginea esențială a unei funcții continue φ este închiderea (în C) a imaginii sale: $\text{essran}(\varphi) = \overline{\varphi(\Omega)}$; demonstrația este elementară și se bazează pe faptul că mulțimile deschise au măsură nenulă. Dacă în plus spațiul Ω este compact, atunci imaginea esențială a unei funcții continue coincide cu imaginea funcției. În particular, (pentru Ω compact) o funcție continuă este inversabilă (în algebra $L^\infty(\Omega, \mu)$) dacă și numai dacă nu se anulează.

10. Teoremă

Într-o algebră Banach unitară spectrul oricărui element este mulțime nevidă și compactă.

Demonstrație Fie \mathcal{A} o algebră Banach comutativă unitară și fie $x \in \mathcal{A}$. Vom arăta mai întâi că $\sigma(x)$ este mulțime compactă. Fie funcția (continuă) $F: C \rightarrow \mathcal{A}$, $F(\lambda) = x - \lambda e$. Imaginea inversă prin F a lui $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ este mulțime deschisă și deci $\sigma(x) = C - F^{-1}(\mathcal{G}(\mathcal{A}))$ este închisă. Pentru a demonstra că $\sigma(x)$ este mulțime mărginită, fie $\lambda \in C$ cu proprietatea $|\lambda| > \|x\|$; atunci $\|\lambda^{-1}x\| < 1$ și deci conform

propoziției 4 rezultă că elementul $e - \lambda^{-1}x$ este inversabil. Am demonstrat deci incluziunea:

$$\sigma(x) \subseteq \{\lambda \in C; |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

Pentru a demonstra că $\sigma(x)$ este mulțime nevidă, să presupunem prin absurd că pentru orice $\lambda \in C$, elementul $\lambda e - x$ este inversabil. Atunci, pentru orice funcțională $f \in \mathcal{A}'$ putem defini aplicația $G : C \rightarrow C$, $G(\lambda) = f((\lambda e - x)^{-1})$. Demonstrăm în continuare că G este funcție întreagă și mărginită. Pentru orice $\omega \in C$ arbitrar fixat, avem:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \omega} \frac{G(\lambda) - G(\omega)}{\lambda - \omega} &= \lim_{\lambda \rightarrow \omega} \frac{f((\lambda e - x)^{-1}) - f((\omega e - x)^{-1})}{\lambda - \omega} = \\ &= f\left(\lim_{\lambda \rightarrow \omega} \frac{(\lambda e - x)^{-1} - (\omega e - x)^{-1}}{\lambda - \omega}\right) = \\ &= f\left(\lim_{\lambda \rightarrow \omega} \frac{(\omega e - x)^{-1}[(\omega e - x) - (\lambda e - x)](\lambda e - x)^{-1}}{\lambda - \omega}\right) = \\ &= -f((\omega e - x)^{-2}), \end{aligned}$$

ceea ce arată că G este funcție întreagă.

Pentru orice $|\lambda| > \|x\|$, din demonstrația propoziției 4, rezultă:

$$\begin{aligned} \|G(\lambda)\| &= \|f((\lambda e - x)^{-1})\| \leq \|f\| \|(\lambda e - x)^{-1}\| = \\ &= \|f\| \|\lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1}\| \leq \|f\| |\lambda^{-1}| (1 - \|\lambda^{-1}x\|)^{-1}, \end{aligned}$$

deci G este funcție mărginită. Din teorema lui Liouville ([1], p.424), rezultă că G este funcție constantă; în particular, $G(0) = G(1)$, adică $f(-x^{-1}) = f((e - x)^{-1})$, $\forall f \in \mathcal{A}'$.

Pe de altă parte, deoarece $-x^{-1} \neq (e - x)^{-1}$, există (în baza corolarului 25, cap.3) o funcțională $g \in \mathcal{A}'$ astfel încât $g(-x^{-1}) \neq g((e - x)^{-1})$, ceea ce constituie o contradicție cu concluzia de mai sus.

O consecință a acestui rezultat este caracterizarea corpurilor Banach.

11. Corolar (Teorema Gelfand-Mazur)

Orice corp Banach este izomorf cu corpul numerelor complexe.

Demonstrație Fie \mathcal{A} un corp Banach și fie $x \in \mathcal{A}$; atunci, conform teoremei 10, există $\lambda(x) \in \sigma(x)$ și deci elementul $\lambda(x)e - x$ nu este inversabil. Deoarece \mathcal{A} este corp, rezultă că $\lambda(x)e - x = 0$, sau, $x = \lambda(x)e$ (de aici rezultă și faptul că $\lambda(x)$ este unic). Se arată simplu că aplicația $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow C$, $\Phi(x) = \lambda(x)$ este un izomorfism de algebre Banach.

12. Definiție

Fie \mathcal{A} o algebră Banach și fie $x \in \mathcal{A}$. **Raza spectrală** a lui x este, prin definiție, $r(x) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(x)\}$. Să observăm că definiția este corectă datorită teoremei 10; de asemenea, din demonstrația aceleiași teoreme rezultă și inegalitatea: $r(x) \leq \|x\|$. Din exemplul 9 rezultă că în algebrele $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ și $L^\infty(\Omega, \mu)$ raza spectrală este egală cu norma: $r(f) = \|f\|_\infty$. O algebră Banach în care raza spectrală și norma nu coincid este algebra operatorilor liniari și continui pe un spațiu Banach; a se vedea, de exemplu, teorema 49, cap.5 (operatorul Volterra are raza spectrală 0, dar nu este identic nul).

Încheiem acest paragraf cu formula razei spectrale.

13. Teoremă (formula razei spectrale)

Fie \mathcal{A} o algebră Banach unitară; atunci, pentru orice $x \in \mathcal{A}$, are loc egalitatea:

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstrație Vom demonstra mai întâi inegalitatea:

$$r(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Pentru aceasta, fie $n \in \mathbb{N}$ și fie $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $\lambda^n \in \rho(x^n)$ (deci există $(\lambda^n e - x^n)^{-1}$). Din identitatea:

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1} e + \lambda^{n-2} x + \dots + x^{n-1}),$$

înmulțind ambii membri cu $(\lambda^n e - x^n)^{-1}$, rezultă că $\lambda e - x$ este element inversabil și deci $\lambda \in \rho(x)$. În concluzie, am demonstrat implicația:

$$\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(x^n).$$

Pe de altă parte, $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ (deoarece raza spectrală este mai mică decât norma) și deci $|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, adică:

$$r(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Pentru a demonstra inegalitatea $r(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, considerăm $|\lambda| > \|x\|$; din propoziția 4 rezultă că $\lambda e - x$ este inversabil și:
 $(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} x^n$. Fie, ca în demonstrația teoremei 10, $f \in \mathcal{A}'$ și

$G : \rho(x) \rightarrow C$, $G(\lambda) = f((\lambda e - x)^{-1})$. Funcția G este olomorfă pe $\rho(x)$; dacă în plus $|\lambda| > \|x\|$, atunci, din formula inversului lui $\lambda e - x$ rezultă:

$$G(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} f(x^n).$$

Rezultă deci că seria $\sum_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} f(x^n)$ converge și pentru $|\lambda| > r(x)$; în particular, de aici rezultă că pentru orice $f \in \mathcal{A}'$ și pentru orice $\lambda \in C$, $|\lambda| > r(x)$ avem:

$$\sup_{n \geq 0} f(\lambda^{-n} x^n) < \infty.$$

Din corolarul 26, cap.3 rezultă $\sup_{n \geq 0} \|\lambda^{-n} x^n\| < \infty$. În concluzie, pentru orice $\lambda \in C$, $|\lambda| > r(x)$, există $k(\lambda) > 0$ astfel încât

$$\|\lambda^{-n} x^n\| \leq k(\lambda), \forall n \in N.$$

De aici rezultă $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| (k(\lambda))^{\frac{1}{n}}$ și deci:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| \leq r(x),$$

ceea ce încheie demonstrația.

4.2 Algebre Banach comutative

În studiul algebrelor Banach comutative, noțiunea de caracter este un instrument foarte puternic. În acest paragraf prezentăm proprietățile spațiului caracterelor asociat unei algebre Banach comutative unitare și teoria transformatei Gelfand.

14. Definiție

Fie \mathcal{A} o algebră Banach comutativă unitară. O aplicație $\psi : \mathcal{A} \rightarrow C$ se numește **caracter** al algebrei \mathcal{A} dacă :

- (i) $\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha \psi(x) + \beta \psi(y)$, $\forall \alpha, \beta \in C$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$; (liniară).
- (ii) $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$; (multiplicativă).
- (iii) ψ nu este identic nulă.

Mulțimea caracterelor unei algebre \mathcal{A} se numește **spațiul caracterelor** algebrei și îl vom nota cu $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

15. Propoziție

Fie $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$; atunci:

- (i) $\psi(e) = 1$.
- (ii) $\psi(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$.
- (iii) ψ este aplicație continuă; deci $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}'$.
- (iv) $\|\psi\| = 1$.

Demonstrație (i) Fie $x \in \mathcal{A}$ astfel încât $\psi(x) \neq 0$; atunci $\psi(x) = \psi(xe) = \psi(x)\psi(e)$ și deci $\psi(e) = 1$.

(ii) Fie $x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ și să presupunem prin absurd că $\psi(x) = 0$; atunci:

$$1 = \psi(e) = \psi(xx^{-1}) = \psi(x)\psi(x^{-1}) = 0, \text{ contradicție.}$$

(iii) Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $|\lambda| > 1$ și fie $x \in \mathcal{A}$ cu proprietatea $\|x\| \leq 1$. Atunci, din propoziția 4 rezultă $e - \lambda^{-1}x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ și deci din **(ii)** rezultă că $\psi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0$, adică $\psi(x) \neq \lambda$. În concluzie, am demonstrat că pentru orice $x \in \mathcal{A}$ cu $\|x\| \leq 1$, are loc inegalitatea $|\psi(x)| \leq 1$. De aici rezultă (cu un raționament pe care l-am mai folosit) inegalitatea $|\psi(x)| \leq \|x\|, \forall x \in \mathcal{A}$ și deci ψ este funcțională continuă cu $\|\psi\| \leq 1$; dar $\psi(e) = 1$ și deci $\|\psi\| = 1$. În particular, din cele demonstrate rezultă incluziunea:

$$\mathcal{K}(\mathcal{A}) \subset \{f \in \mathcal{A}'; \|f\| = 1\}.$$

16. Propoziție

Fie \mathcal{A} o algebră Banach comutativă unitară. Considerând pe dualul \mathcal{A}' topologia slabă (notată w^* ; a se vedea definiția 46, cap.3), atunci, $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ este mulțime compactă; se mai spune că spațiul caracterelor unei algebre Banach comutative unitare este slab-compact.

Demonstrație Conform teoremei lui Alaoglu (teorema 47, cap.3), sfera unitate din \mathcal{A}' este compactă în topologia w^* , deci este suficient să demonstrăm că $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ este submulțime închisă (în topologia w^*) în mulțimea $\{f \in \mathcal{A}'; \|f\| = 1\}$.

Fie $\overline{\mathcal{K}(\mathcal{A})}$ închiderea mulțimii $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ în topologia w^* și fie $f \in \overline{\mathcal{K}(\mathcal{A})}$; pentru a arăta că $f \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, vom arăta că f este funcțională multiplicativă și $f(e) = 1$. Pentru aceasta, fie $x, y \in \mathcal{A}$ și $\epsilon > 0$, arbitrari. Considerăm vecinătatea lui f (cf. definiției 46, cap.3):

$$W = \{g \in \mathcal{A}'; |g(t) - f(t)| < \epsilon, \forall t \in \{x, y, xy, e\}\}.$$

Fie $h \in W \cap \mathcal{K}(\mathcal{A})$; deoarece h este multiplicativă, avem:

$$\begin{aligned} |f(xy) - f(x)f(y)| &\leq |f(xy) - h(xy)| + \\ &|h(x)[h(y) - f(y)]| + |f(y)[h(x) - f(x)]| \leq \\ &\leq (1 + \|x\| + |f(y)|)\epsilon; \end{aligned}$$

deoarece ϵ a fost arbitrar, rezultă $f(xy) = f(x)f(y)$.
Deoarece $h(e) = 1$, rezultă

$$|f(e) - 1| = |f(e) - h(e)| < \epsilon,$$

și deci $f(e) = 1$, ceea ce încheie demonstrația.

17. Definiție

Fie \mathcal{A} o algebră Banach comutativă unitară și fie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ spațiul caracterelor asociat ei, considerat ca spațiu topologic (compact) cu topologia slabă. Fie $(\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$ algebra Banach (comutativă) a funcțiilor continue definite pe $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ cu valori complexe (cf. exemplului 2(ii)). Aplicația

$$\Gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A})), (\Gamma(x))(\psi) = \psi(x)$$

se numește **transformarea Gelfand** pe algebra \mathcal{A} .

Funcția (continuă) $\Gamma(x)$ se numește **transformata Gelfand** a elementului $x \in \mathcal{A}$.

Proprietățile imediate ale transformării Gelfand sunt date în următoarea propoziție.

18. Propoziție

În condițiile definiției 17, avem:

- (i) Aplicația Γ este morfism de algebre Banach.
- (ii) $\|\Gamma(x)\|_\infty \leq \|x\|$, (deci Γ este continuă).
- (iii) $\sigma(x) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} ; \exists \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) \text{ astfel încât } (\Gamma(x))(\psi) = \lambda\}$.

Proprietatea (iii) afirmă că spectrul elementului $x \in \mathcal{A}$ conține imaginea funcției continue $\Gamma(x)$. Conform exemplului 8(ii), această imagine este spectrul funcției $\Gamma(x)$ în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$; prin urmare (iii) se poate reformula astfel: $\sigma(x) \supseteq \sigma(\Gamma(x))$.

Demonstrație (i) Liniaritatea aplicației Γ este evidentă. Pentru a demonstra multiplicativitatea, fie $x, y \in \mathcal{A}$ și $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$; avem:

$$(\Gamma(xy))(\psi) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = (\Gamma(x))(\psi)(\Gamma(y))(\psi).$$

- (ii) Fie $x \in \mathcal{A}$; avem:

$$\|\Gamma(x)\|_\infty = \sup_{\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})} |\psi(x)| \leq \sup\{|f(x)| ; f \in \mathcal{A}', \|f\| = 1\} = \|x\|,$$

unde, pentru ultima egalitate am folosit corolarul 26, cap.3.

- (iii) Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $\lambda e - x$ este inversabil; atunci, conform propoziției 15(ii), pentru orice $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, avem $\psi(\lambda e - x) \neq 0$, adică

$\lambda \neq \psi(x), \forall \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$. Rezultă deci că λ nu este în imaginea funcției $\Gamma(x)$, deci am demonstrat incluziunea $\rho(x) \subseteq C - \Gamma(x)(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$.

Înainte de a demonstra și alte proprietăți ale transformării Gelfand, (dintre care cea mai importantă este că în (iii) avem egalitate), vom da câteva exemple.

19.Exemple

(i) Să considerăm algebra $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \|\cdot\|_\infty)$. Vom demonstra că, în acest caz, spațiul caracterelor se poate identifica (într-un mod canonic, ce va fi precizat) cu spațiul topologic compact \mathcal{D} . Fie $t \in \mathcal{D}$ și fie

$\psi_t : \mathcal{C}(\mathcal{D}) \rightarrow C, \psi_t(f) = f(t)$. Atunci ψ_t este caracter al algebrei $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, iar aplicația $\mathcal{D} \ni t \rightarrow \psi_t \in \mathcal{K}(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$ este bijectivă, continuă și cu inversa continuă (o astfel de aplicație între două spații topologice se numește homeomorfism). Înainte de a demonstra această afirmație să observăm că transformarea Gelfand pe algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ este, (folosind identificarea de mai sus), aplicația identică $\Gamma : \mathcal{C}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{C}(\mathcal{D})))$, $(\Gamma(f))(\psi_t) = f(t)$, adică $\Gamma(f) = f$. Faptul că pentru orice $t \in \mathcal{D}$ funcționala ψ_t este caracter este imediat. Demonstrăm acum că orice caracter este de această formă: fie $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$ și fie nucleul $\text{Ker}(\psi) = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}); \psi(f) = 0\}$. Arătăm mai întâi că există $t_o \in \mathcal{D}$ astfel încât $f(t_o) = 0, \forall f \in \text{Ker}(\psi)$. Să presupunem prin absurd că pentru orice $t \in \mathcal{D}$, există $f^t \in \text{Ker}(\psi)$ astfel încât $f^t(t) \neq 0$; atunci, din continuitatea lui f^t rezultă că există o vecinătate deschisă V_t a lui t astfel încât $f^t(s) \neq 0, \forall s \in V_t$. Mulțimea $\{V_t\}_{t \in \mathcal{D}}$ este o acoperire deschisă a spațiului compact \mathcal{D} , deci există $V_{t_1}, V_{t_2}, \dots, V_{t_n}$ astfel încât $\bigcup_{i=1}^n V_{t_i} = \mathcal{D}$. Fie

$g = \sum_{i=1}^n \bar{f}_{t_i} f_{t_i}$; atunci:

$$\psi(g) = \sum_{i=1}^n \psi(\bar{f}_{t_i})\psi(f_{t_i}) = 0, \quad (4.1)$$

și deci $g \in \text{Ker}(\psi)$. Dar $g(s) = \sum_{i=1}^n |f_{t_i}(s)|^2 > 0$ și deci g este funcție inversabilă în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D})$. Deoarece caracterele nu se anulează pe elemente inversabile, rezultă că $\psi(g) \neq 0$, ceea ce este în contradicție cu (4.1). Fie deci $t_o \in \mathcal{D}$ astfel încât $f(t_o) = 0, \forall f \in \text{Ker}(\psi)$. Pentru orice $h \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$, funcția $h - \psi(h)1 \in \text{Ker}(\psi)$, deoarece $\psi(h - \psi(h)1) = \psi(h) - \psi(h)\psi(1) = 0$. Rezultă deci că $(h - \psi(h)1)(t_o) = 0$, adică $\psi(h) = h(t_o), \forall h \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$. În concluzie, am demonstrat că $\psi = \psi_{t_o}$. Aplicația $\mathcal{W} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C}(\mathcal{D})), \mathcal{W}(t) = \psi_t$ este bijectivă (surjectivitatea a fost demonstrată mai sus, iar injectivitatea este evidentă). Pentru a demonstra continuitatea aplicației \mathcal{W} vom face ipoteza suplimentară că \mathcal{D} este spațiu metric (compact); demonstrația se poate adapta și pentru cazul general, avantajul spațiilor metrice fiind acela

că putem caracteriza continuitatea cu ajutorul șirurilor. Fie $(t_n)_n$ un șir care converge la t (în spațiul metric \mathcal{D}). Pentru orice $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$, avem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathcal{W}(t_n)](f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{t_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = \\ &= f(t) = \psi_t(f) = [\mathcal{W}(t)](f), \end{aligned}$$

ceea ce arată că aplicația \mathcal{W} este continuă. Continuitatea lui \mathcal{W}^{-1} este acum consecința directă a unui rezultat de topologie : orice aplicație bijectivă și continuă între două spații compacte are inversa continuă, ([3], p.111).

(ii) Pentru a identifica spațiul caracterelor algebrei $\ell^1(Z)$, vom reaminti mai întâi câteva proprietăți ale transformării Fourier definite pe această algebră.

Fie $x \in \ell^1(Z)$ și fie \mathcal{S}^1 cercul unitate. Seria $\sum_{n \in Z} x(n)\lambda^{-n}$ converge absolut și uniform (în raport cu $\lambda \in \mathcal{S}^1$):

$$\sum_{n \in Z} |x(n)\lambda^{-n}| \leq \sum_{n \in Z} |x(n)| = \|x\|_1.$$

Notăm cu $\hat{x}(\lambda)$ suma seriei de mai sus; funcția $\hat{x} : \mathcal{S}^1 \rightarrow C$ este mărginită și continuă (exercițiu). Funcția \hat{x} se numește **transformata Fourier** a lui x , iar aplicația

$$\mathcal{F} : \ell^1(Z) \rightarrow C(\mathcal{S}^1)$$

se numește **transformarea Fourier** pe algebra $\ell^1(Z)$. Este ușor de arătat că \mathcal{F} este liniară și continuă. Demonstrăm în continuare faptul că \mathcal{F} este multiplicativă:

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(x \star y)](\lambda) &= \sum_{n \in Z} (x \star y)(n)\lambda^{-n} = \\ &= \sum_{n \in Z} \sum_{k \in Z} x(n-k)y(k)\lambda^{-n} = \sum_{k \in Z} \sum_{m \in Z} x(m)y(k)\lambda^{-k-m} = \\ &= \left(\sum_{m \in Z} x(m)\lambda^{-m} \right) \left(\sum_{k \in Z} y(k)\lambda^{-k} \right) = (\mathcal{F}x)(\mathcal{F}y). \end{aligned}$$

Schimbarea ordinii de sumare mai sus este corectă deoarece seriile sunt absolut convergente.

Demonstrăm în continuare că mulțimea caracterelor algebrei $\ell^1(Z)$ se poate identifica cu cercul unitate \mathcal{S}^1 în modul următor: pentru orice caracter $\psi \in \mathcal{K}(\ell^1(Z))$, există un unic $\zeta \in \mathcal{S}^1$ astfel încât $\psi(x) = \hat{x}(\zeta)$, unde, \hat{x} este transformata Fourier a lui x . Cu identificarea

$$\mathcal{K}(\ell^1(Z)) \ni \psi \leftrightarrow \zeta \in \mathcal{S}^1$$

de mai sus, transformarea Gelfand pe algebra $\ell^1(Z)$ coincide cu transformarea Fourier, $\Gamma : \ell^1(Z) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$, $\Gamma x = \hat{x}$. Acest exemplu sugerează faptul că transformarea Gelfand este o generalizare într-un cadru abstract a transformatei Fourier; de altfel, o altă notație frecvent utilizată pentru Γx este \hat{x} . Demonstrăm mai întâi că pentru orice $\zeta \in \mathcal{S}^1$, aplicația $\psi_\zeta : \ell^1(Z) \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_\zeta(x) = \hat{x}(\zeta)$ este caracter al algebrei $\ell^1(Z)$; pentru orice $x, y \in \ell^1(Z)$, avem:

$$\psi_\zeta(x \star y) = (\widehat{x \star y})(\zeta) = \hat{x}(\zeta)\hat{y}(\zeta) = \psi_\zeta(x)\psi_\zeta(y).$$

Evident, ψ_ζ este liniară și în plus $\psi_\zeta(\sigma_o) = 1 \neq 0$.

Pentru a demonstra afirmația reciprocă, fie $\psi \in \mathcal{K}(\ell^1(Z))$; în particular, ψ este o funcțională liniară și continuă pe spațiul Banach $\ell^1(Z)$ și deci conform exemplului 10(i) din capitolul 3, există și este unic un șir mărginit $\phi \in \ell^\infty(Z)$ astfel încât:

$$\psi(x) = \sum_{n \in Z} x(n)\phi(n), \quad \forall x \in \ell^1(Z) \quad (4.2)$$

și $\|\phi\|_\infty = \|\psi\| = 1$. Pentru orice $x \in \ell^1(Z)$ și $m \in Z$, notăm $x_m(n) = x(n - m)$. Fie $x, y \in \ell^1(Z)$; avem:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in Z} \psi(x)y(n)\phi(n) &= \psi(x)\psi(y) = \psi(x \star y) = \sum_{n \in Z} (x \star y)(n)\phi(n) = \\ &= \sum_{n \in Z} y(n) \sum_{k \in Z} x(k - n)\phi(k) = \sum_{n \in Z} y(n)\psi(x_n). \end{aligned}$$

Rezultă că:

$$\psi(x)\phi(n) = \psi(x_n), \quad \forall n \in Z. \quad (4.3)$$

Înlocuind în egalitatea de mai sus pe $n \in Z$ cu $n + k \in Z$ (și deci pe x_n cu x_{n+k}), obținem:

$$\begin{aligned} \psi(x)\phi(n + k) &= \psi(x_{n+k}) = \psi((x_n)_k) = \\ &= \psi(x_n)\phi(k) = \psi(x)\phi(n)\phi(k), \quad \forall n, k \in Z. \end{aligned}$$

Rezultă deci:

$$\phi(n + k) = \phi(n)\phi(k), \quad \forall n, k \in Z. \quad (4.4)$$

Din egalitatea (4.4) rezultă că $\phi(-n) = (\phi(n))^{-1}$ și deoarece $|\phi(n)| \leq 1, \forall n \in Z$, (pentru că $\|\phi\|_\infty = 1$) rezultă că $|\phi(n)| = 1, \forall n \in Z$. În concluzie, ϕ are următoarele proprietăți:

$$\phi(n + m) = \phi(n)\phi(m) \text{ și } |\phi(n)| = 1, \quad \forall n, m \in Z.$$

Notând $\phi(1) = \zeta^{-1} \in \mathcal{S}^1$, rezultă (exercițiu) că $\phi(n) = \zeta^{-n}, \forall n \in Z$, și deci $\psi(x) = \sum_{n \in Z} x(n)\zeta^{-n}$, adică $\psi(x) = \hat{x}(\zeta)$. Lăsăm ca exercițiu uni-

citarea lui ζ (trebuie demonstrat că dacă $\hat{x}(\zeta_1) = \hat{x}(\zeta_2)$, $\forall x \in \ell^1(Z)$, atunci $\zeta_1 = \zeta_2$).

Pentru a continua studiul transformatei Gelfand, introducem noțiunile de ideal și algebră cât.

20. Definiție

Fie \mathcal{A} o algebră normată comutativă unitară. O submulțime $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ se numește **ideal** (în \mathcal{A}) dacă:

- (i) \mathcal{I} este subspațiu vectorial.
- (ii) $\forall x \in \mathcal{I}$ și $\forall y \in \mathcal{A}$ rezultă $xy \in \mathcal{I}$.

Dacă $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$, atunci \mathcal{I} se numește **ideal propriu**. Dacă \mathcal{I} nu este conținut în nici un alt ideal propriu, atunci el se numește **ideal maximal**. Dacă idealul \mathcal{I} este și submulțime închisă în \mathcal{A} , atunci \mathcal{I} se numește **ideal închis**. Să mai facem observația că într-un ideal propriu nu există elemente inversabile (dacă un ideal conține elemente inversabile, atunci el coincide cu algebra \mathcal{A}).

21. Teoremă

Fie \mathcal{A} o algebră Banach comutativă unitară. Atunci orice ideal propriu este conținut într-un ideal maximal și orice ideal maximal este închis.

Demonstrație Fie \mathcal{I} un ideal propriu în \mathcal{A} și fie:

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{J} \subset \mathcal{A}; \mathcal{J} \text{ ideal propriu și } \mathcal{J} \supseteq \mathcal{I}\}.$$

Atunci (\mathcal{M}, \subseteq) este mulțime parțial ordonată. Arătăm că \mathcal{M} este inductiv ordonată; pentru aceasta, fie $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ o submulțime total ordonată și fie $\mathcal{Z} = \bigcup_{\mathcal{J} \in \mathcal{N}} \mathcal{J}$. Se demonstrează fără dificultate că \mathcal{Z} este un element maximal al lui \mathcal{N} . Conform lemei lui Zorn (lema 16, cap.3) rezultă că există un ideal maximal care-l conține pe \mathcal{I} ; să mai observăm că până aici nu am folosit completitudinea algebrei \mathcal{A} . Fie acum \mathcal{Y} un ideal maximal în \mathcal{A} și fie $\overline{\mathcal{Y}}$ închiderea sa. Folosind completitudinea algebrei \mathcal{A} se demonstrează simplu că $\overline{\mathcal{Y}}$ este de asemenea ideal. Dacă prin absurd $\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{A}$, atunci $e \in \overline{\mathcal{Y}}$. Ar exista deci un șir $x_n \in \mathcal{Y}$ (deci implicit nici unul din termenii șirului x_n nu este inversabil) astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$. Rezultă deci că în orice vecinătate a lui e există elemente neinvertabile, ceea ce constituie o contradicție cu faptul că mulțimea elementelor inversabile este deschisă (propoziția 5). În concluzie, $\overline{\mathcal{Y}}$ este ideal propriu și (evident) îl conține pe \mathcal{Y} care este (din ipoteză) maximal; rezultă deci că $\mathcal{Y} = \overline{\mathcal{Y}}$, adică \mathcal{Y} este mulțime închisă.

Definim în continuare noțiunea de algebră cât.

22. Definiție

Fie \mathcal{A} o algebră comutativă (nu neapărat normată) și fie \mathcal{J} un ideal propriu în \mathcal{A} . Relația de echivalență (pe \mathcal{A}) indusă de \mathcal{J} este definită prin $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{J}$; clasa de echivalență a elementului x este $\tilde{x} = x + \mathcal{J} = \{x + y; y \in \mathcal{J}\}$. Mulțimea claselor de echivalență, notată $\widetilde{\mathcal{A}/\mathcal{J}}$ se organizează ca spațiu vectorial cu operațiile: $\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{x + y}$ și $\lambda \tilde{x} = \widetilde{\lambda x}$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$, $\forall \lambda \in C$, ([1], p.37). Vectorul nul în \mathcal{A}/\mathcal{J} este $\tilde{0} = \mathcal{J}$. Este evident că până aici construcția coincide cu cea din teoria spațiilor vectoriale (deci ar fi fost suficient ca \mathcal{J} să fi fost doar un subspațiu vectorial). Definim în continuare structura de algebră pe spațiul vectorial \mathcal{A}/\mathcal{J} . Pentru aceasta, să observăm că dacă $x_1 \sim x_2$ și $y_1 \sim y_2$, atunci din identitatea

$$x_2 y_2 - x_1 y_1 = (x_2 - x_1) y_2 + x_1 (y_2 - y_1),$$

rezultă $x_1 y_1 \sim x_2 y_2$, ceea ce permite definirea înmulțirii în \mathcal{A}/\mathcal{J} prin formula $\tilde{x} \tilde{y} = \widetilde{xy}$. Se demonstrează că \mathcal{A}/\mathcal{J} împreună cu aceste operații este algebră comutativă; în plus, aplicația $\mathcal{A} \ni x \rightarrow \tilde{x} \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$ este morfism de algebre având drept nucleu idealul \mathcal{J} .

Dacă \mathcal{A} are unitatea e , atunci \tilde{e} este unitate în algebra \mathcal{A}/\mathcal{J} . Numim \mathcal{A}/\mathcal{J} **algebra cât** definită de idealul \mathcal{J} .

23. Propoziție

Fie \mathcal{A} algebră comutativă cu unitate și fie \mathcal{J} un ideal propriu în \mathcal{A} . Atunci algebra cât \mathcal{A}/\mathcal{J} este corp dacă și numai dacă idealul \mathcal{J} este maximal.

Demonstrație Fie \mathcal{J} un ideal maximal și fie, pentru orice $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{I}(x) = \{ax + y; a \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{J}\}$; atunci $\mathcal{I}(x)$ este ideal (ceea ce se demonstrează imediat) și în plus $\mathcal{I}(x)$ îl conține strict pe \mathcal{J} (de exemplu $x \in \mathcal{I}(x) - \mathcal{J}$). Deoarece \mathcal{J} este maximal, rezultă că $\mathcal{I}(x) = \mathcal{A}$, deci există $a \in \mathcal{A}$ și $y \in \mathcal{J}$ astfel încât $ax + y = e$, adică $\tilde{a}x + \tilde{y} = \tilde{e}$. Dar, deoarece $y \in \mathcal{J}$, rezultă că $\tilde{y} = \tilde{0}$ și deci $\tilde{a}x = \tilde{e}$, ceea ce arată că \tilde{x} este element inversabil în algebra cât \mathcal{A}/\mathcal{J} . Cum x a fost un element arbitrar din $\mathcal{A} - \mathcal{J}$, rezultă că toate elementele nenule din \mathcal{A}/\mathcal{J} sunt inversabile, deci această algebră este corp. Pentru a demonstra afirmația reciprocă, să presupunem că idealul \mathcal{J} nu este maximal. Vom arăta că există în \mathcal{A}/\mathcal{J} elemente nenule neinvertabile. Fie $x \in \mathcal{A} - \mathcal{J}$ (deci $\tilde{x} \neq \tilde{0}$); fie $\mathcal{I}(x) = \{ax + y; a \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{J}\}$. Se poate demonstra (exercițiu) că putem alege $x \in \mathcal{A} - \mathcal{J}$ astfel încât idealul $\mathcal{I}(x)$ să nu fie maximal (se folosește faptul că \mathcal{J} nu este maximal). Pentru un astfel de x ales, rezultă că $e \notin \mathcal{I}(x)$, deci nu există $a \in \mathcal{A}$ astfel încât $\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{e}$, ceea ce arată că \tilde{x} nu este inversabil în algebra cât \mathcal{A}/\mathcal{J} .

24. Propoziție

Fie $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un spațiu normat și fie \mathcal{J} un subspațiu vectorial închis în \mathcal{A} . Pentru orice $\tilde{x} \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$, definim:

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{J}} \|x + y\| = \inf\{\|z\|; z \in \mathcal{A}, z \sim x\}.$$

Atunci:

- (i) $(\mathcal{A}/\mathcal{J}, \|\cdot\|)$ este spațiu normat.
- (ii) Dacă \mathcal{A} este spațiu Banach, atunci \mathcal{A}/\mathcal{J} este spațiu Banach.
- (iii) Dacă \mathcal{A} este algebră Banach comutativă și \mathcal{J} este un ideal propriu închis, atunci \mathcal{A}/\mathcal{J} este algebră Banach comutativă. Dacă în plus \mathcal{A} este algebră unitară, atunci $\|\tilde{e}\| = 1$.

Demonstrație (i) Dacă $x \in \mathcal{J}$, atunci $\|\tilde{x}\| = 0$; dacă $x \notin \mathcal{J}$, atunci $\|\tilde{x}\| > 0$, deoarece \mathcal{J} este mulțime închisă (lăsăm ca exercițiu observația că $\|\tilde{x}\|$ este distanța de la x la \mathcal{J}). Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ și $x \in \mathcal{A}$, atunci egalitatea $\|\lambda\tilde{x}\| = |\lambda| \|\tilde{x}\|$ se verifică imediat. Demonstrăm acum inegalitatea triunghiului; fie $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ și fie $\epsilon > 0$. Din definiție, rezultă că există $y_1, y_2 \in \mathcal{J}$ astfel încât:

$$\|x_i + y_i\| < \|\tilde{x}_i\| + \epsilon, \forall i = 1, 2.$$

Însumând cele două inegalități de mai sus, rezultă:

$$\|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\| \leq \|\tilde{x}_1\| + \|\tilde{x}_2\| + 2\epsilon.$$

Folosind și inegalitățile evidente:

$$\| \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \| \leq \| x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \| \leq \| x_1 + y_1 \| + \| x_2 + y_2 \|,$$

rezultă:

$$\| \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \| \leq \| \tilde{x}_1 \| + \| \tilde{x}_2 \| + 2\epsilon,$$

și deci, pentru $\epsilon \rightarrow 0$, obținem $\| \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \| \leq \| \tilde{x}_1 \| + \| \tilde{x}_2 \|$.

(ii) Presupunem că \mathcal{A} este spațiu Banach și fie $(\tilde{x}_n)_n$ un șir Cauchy în \mathcal{A}/\mathcal{J} . Cu procedeul obișnuit ([8],p.21; [3],p.26) extragem un subșir $\widetilde{x_{n_i}} \subseteq \widetilde{x_n}$ astfel încât $\| \widetilde{x_{n_i}} - \widetilde{x_{n_{i+1}}} \| \leq 2^{-i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Fie $z_i \in \widetilde{x_{n_i}}$ astfel încât $\| z_i - z_{i+1} \| \leq 2^{-i}$; atunci $(z_i)_i$ este un șir Cauchy în \mathcal{A} și deci există $z \in \mathcal{A}$ astfel încât $z = \lim_{i \rightarrow \infty} z_i$; din definiția normei pe \mathcal{A}/\mathcal{J} , rezultă:

$$\| \widetilde{x_{n_i}} - \tilde{z} \| \leq \| z_i - z \|,$$

și deci $\lim_{i \rightarrow \infty} \widetilde{x_{n_i}} = \tilde{z}$, ceea ce încheie demonstrația (un șir Cauchy care conține un subșir convergent, este convergent).

(iii) Trebuie să demonstrăm că $\| \widetilde{x_1 x_2} \| \leq \| \widetilde{x_1} \| \| \widetilde{x_2} \|$, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}$. Pentru aceasta, fie $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ și $\epsilon > 0$; fie, ca în demonstrația punctului (i), $y_1, y_2 \in \mathcal{J}$ care verifică:

$$\| x_i + y_i \| \leq \| \widetilde{x_i} \| + \epsilon, \forall i = 1, 2. \quad (4.5)$$

Să mai observăm că:

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1 x_2 + y_1(x_2 + y_2) + x_1 y_2 \in x_1 x_2 + \mathcal{J},$$

deci, din definiția normei pe \mathcal{A}/\mathcal{J} , avem:

$$\| \widetilde{x_1 x_2} \| \leq \| (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \| \leq \| x_1 + y_1 \| \| x_2 + y_2 \|.$$

Folosind acum inegalitatea rezultată prin înmulțirea inegalităților (4.5), avem:

$$\| \widetilde{x_1 x_2} \| \leq \| \widetilde{x_1} \| \| \widetilde{x_2} \| + \epsilon(\| \widetilde{x_1} \| + \| \widetilde{x_2} \| + \epsilon),$$

ceea ce încheie demonstrația deoarece ϵ a fost arbitrar.

Dacă e este elementul unitate al algebrei \mathcal{A} , atunci $e \in \tilde{e}$ și deci $\| \tilde{e} \| \leq \| e \| = 1$. Pentru cealaltă inegalitate, fie $x \in \mathcal{A} - \mathcal{J}$; avem:

$$\| \tilde{x} \| = \| \widetilde{x e} \| \leq \| \tilde{x} \| \| \tilde{e} \|.$$

De aici, deoarece $\| \tilde{x} \| \neq 0$, rezultă $\| \tilde{e} \| \geq 1$.

Revenim acum la studiul algebrelor Banach comutative unitare și demonstrăm următorul rezultat important.

25. Teoremă

(a) Fie \mathcal{A} o algebră Banach comutativă unitară. Atunci, pentru orice $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, subspațiul $\text{Ker}(\psi)$ este ideal maximal în \mathcal{A} .

(b) Reciproc, pentru orice ideal maximal $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, există $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ astfel încât $\mathcal{M} = \text{Ker}(\psi)$.

Demonstrație (a) Fie $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, $a \in \text{Ker}(\psi)$ și $x \in \mathcal{A}$. Deoarece $\psi(ax) = \psi(a)\psi(x) = 0$, rezultă că $\text{Ker}(\psi)$ este ideal; în plus, el este și propriu pentru că $e \notin \text{Ker}(\psi)$. Presupunem prin absurd că $\text{Ker}(\psi)$ nu ar fi ideal maximal; atunci, conform teoremei 21, există un ideal maximal $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, astfel încât $\text{Ker}(\psi) \subset \mathcal{M}$ (incluziunea fiind strictă).

Fie $a \in \mathcal{M} - \text{Ker}(\psi)$; deoarece $\psi(e - (\psi(a))^{-1}a) = 0$, rezultă că $e - (\psi(a))^{-1}a \in \text{Ker}(\psi) \subset \mathcal{M}$.

Din egalitatea evidentă: $e = (e - (\psi(a))^{-1}a) + (\psi(a))^{-1}a$, rezultă că $e \in \mathcal{M}$ (deoarece este combinație liniară a două elemente din \mathcal{M}); aceasta este în contradicție cu faptul că un ideal propriu nu conține elemente inversabile.

(b) Demonstrăm acum afirmația reciprocă; fie \mathcal{M} un ideal maximal în \mathcal{A} . Conform propoziției 23 (\mathcal{M} este maximal) și propoziției 24(iii) (\mathcal{M} este închis) rezultă că \mathcal{A}/\mathcal{M} este corp Banach. Din teorema Gelfand-Mazur (corolarul 11) rezultă că există un izomorfism (canonic) de corpuri Banach $\Phi : \mathcal{A}/\mathcal{M} \rightarrow C$. Fie $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$, $g(x) = \tilde{x}$ și fie $\psi = \Phi \circ g$. Lăsăm ca exercițiu faptul că ψ este caracter. Arătăm acum (prin dublă incluziune) egalitatea $\text{Ker}(\psi) = \mathcal{M}$. Fie $x \in \mathcal{M}$; atunci $g(x) = 0$ și deci $\psi(x) = 0$, adică $x \in \text{Ker}(\psi)$. Fie acum $x \in \text{Ker}(\psi)$; atunci $\psi(x) = 0$, și deci (deoarece Φ este injectivă) rezultă că $g(x) = 0$, adică $x \in \mathcal{M}$, ceea ce încheie demonstrația.

Putem completa acum proprietățile transformării Gelfand (prezentate în propoziția 18) cu următorul rezultat fundamental.

26. Teoremă (Gelfand)

Fie \mathcal{A} o algebră Banach comutativă unitară; atunci:

(i) $\sigma(x) = \{\lambda \in C; \exists \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) \text{ astfel încât } \psi(x) = \lambda\} = (\Gamma(x))(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$.

(ii) $\|\Gamma(x)\|_{\infty} = r(x)$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

Notațiile sunt cele din definiția 17: $\Gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ este transformarea Gelfand pe algebra \mathcal{A} , $\sigma(x)$ este spectrul elementului $x \in \mathcal{A}$, iar $r(x)$ este raza sa spectrală. Înainte de a demonstra teorema, vom face câteva observații în legătură cu enunțul. Evident, (ii) este o consecință imediată a lui (i). Afirmația (i) se poate reformula și astfel: x este element inversabil în algebra \mathcal{A} dacă și numai dacă $\Gamma(x)$ este funcție inversabilă în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$. Pe de altă parte, elementele inversabile din algebra funcțiilor continue au fost caracterizate în exemplul 9(ii), (a se vedea și exemplul 19(i)). În concluzie, transformarea Gelfand permite caracterizarea elementelor inversabile din algebra comutativă unitară abstractă \mathcal{A} cu ajutorul elementelor inversabile

dintr-o algebră concretă: $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$; mai adăugăm că, în general, Γ nu este izomorfism de algebre Banach. În paragraful următor vom studia o clasă de algebre pentru care transformarea Gelfand este izomorfism.

Demonstrație Fie $x \in \mathcal{A}$. Incluziunea

$$\sigma(x) \supseteq \{\lambda \in C; \exists \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) \text{ astfel încât } \psi(x) = \lambda\}$$

a fost demonstrată în propoziția 16. Fie acum $\lambda \in \sigma(x)$; atunci, elementul $\lambda e - x$ nu este inversabil. Fie $\mathcal{J} = \{(\lambda e - x)y; y \in \mathcal{A}\}$; atunci \mathcal{J} este ideal propriu în \mathcal{A} (exercițiu). Din teorema 21 rezultă că există un ideal maximal \mathcal{M} care-l conține pe \mathcal{J} ; conform teoremei 25(b), rezultă că există $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ astfel încât $\mathcal{M} = \text{Ker}(\psi)$. În concluzie, există un caracter ψ astfel încât $\mathcal{J} \subseteq \text{Ker}(\psi)$, deci $\psi(\lambda e - x) = 0$. Rezultă deci că $\lambda = \psi(x)$, ceea ce încheie demonstrația.

Prezentăm în continuare o aplicație remarcabilă a teoremei lui Gelfand, cunoscută sub numele de teorema de transformare a spectrului.

27. Definiție

Fie f o funcție întregă, deci există un șir de numere complexe a_n astfel încât $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pentru orice $z \in C$. Dacă \mathcal{A} este o algebră Banach comutativă unitară, atunci pentru orice $x \in \mathcal{A}$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă; vom nota suma acestei serii cu $f(x)$. Un caz particular remarcabil este funcția exponențială: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

28. Teoremă (de transformare a spectrului)

Fie \mathcal{A} o algebră Banach comutativă unitară și f o funcție întregă. Atunci, pentru orice $x \in \mathcal{A}$, avem:

$$\sigma(f(x)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Demonstrație Din teorema 26, rezultă:

$$\begin{aligned} \sigma(f(x)) &= (\Gamma(f(x))(\mathcal{K}(\mathcal{A}))) = \\ &= \{\psi(f(x)); \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})\} = \{f(\psi(x)); \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})\} = f(\sigma(x)). \end{aligned}$$

4.3 C^* -algebre comutative

29. Definiție

Fie \mathcal{A} o algebră Banach (nu neapărat comutativă). O aplicație

$\star : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se numește **involuție** (pe \mathcal{A}) dacă satisface următoarele condiții:

- (i) $(x^\star)^\star = x$,
- (ii) $(\alpha x + \beta y)^\star = \bar{\alpha}x^\star + \bar{\beta}y^\star$,
- (iii) $(xy)^\star = y^\star x^\star$,

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ și $x, y \in \mathcal{A}$. În acest caz (\mathcal{A}, \star) se numește **algebră Banach cu involuție**. Dacă în plus are loc și egalitatea:

- (iv) $\|x^\star x\| = \|x\|^2, \forall x \in \mathcal{A}$,

atunci \mathcal{A} se numește **C^* -algebră**. Două algebre cu involuție, \mathcal{A}_1 și \mathcal{A}_2 se numesc izomorfe dacă există un izomorfism de algebre Banach $F : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ cu proprietatea: $(F(x))^\star = F(x^\star), \forall x \in \mathcal{A}_1$.

Într-o algebră cu involuție se pot defini câteva clase de elemente cu proprietăți remarcabile:

- (a) $x \in \mathcal{A}$ se numește **autoadjunct** dacă $x^\star = x$.
- (b) $x \in \mathcal{A}$ se numește **normal** dacă $x^\star x = x x^\star$.
- (c) Dacă în plus algebra are și unitate, atunci $x \in \mathcal{A}$ se numește **unitar** dacă $x^{-1} = x^\star$.

30. Observație

Din egalitatea (iii) de mai sus rezultă că x este inversabil dacă și numai dacă x^\star este inversabil și în acest caz $(x^\star)^{-1} = (x^{-1})^\star$. Este de asemenea evident că pentru orice $x \in \mathcal{A}$, următoarele elemente sunt autoadjuncte: $x^\star x, x x^\star, \frac{1}{2}(x + x^\star), \frac{1}{2i}(x - x^\star)$; rezultă că orice element $x \in \mathcal{A}$ se poate scrie în mod unic sub forma $x = h + ik$, cu h și k autoadjuncte (evident $h = \frac{1}{2}(x + x^\star)$ și $k = \frac{1}{2i}(x - x^\star)$). În plus, x este normal dacă și numai dacă $hk = kh$.

31. Propoziție

Într-o C^* -algebră \mathcal{A} are loc egalitatea $\|x^\star\| = \|x\|, \forall x \in \mathcal{A}$; în consecință, involuția este aplicație continuă.

Demonstrație Din inegalitatea $\|x\|^2 = \|x^\star x\| \leq \|x^\star\| \|x\|$, rezultă că $\|x\| \leq \|x^\star\|$; înlocuind în ultima inegalitate pe x cu x^\star și folosind egalitatea $(x^\star)^\star = x$, rezultă $\|x^\star\| \leq \|x\|$, ceea ce încheie demonstrația. Pentru a demonstra continuitatea involuției, fie $(x_n)_n$ un șir din \mathcal{A} care converge la x . Atunci $(x_n^\star)_n$ converge la x^\star deoarece

$$\|x_n^\star - x^\star\| = \|(x_n - x)^\star\| = \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

32. Exemple

(i) Cel mai simplu exemplu de C^* -algebră comutativă unitară este algebra numerelor complexe, \mathbb{C} . Involuția este conjugarea complexă, elementele autoadjuncte sunt numerele reale, iar elementele unitare

sunt numerele complexe de modul 1.

(ii) Algebra Banach a funcțiilor continue, $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, din exemplul 2(i) este C^* -algebră cu involuția $f^* = \bar{f}$, unde, $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$. Elementele autoadjuncte sunt funcțiile cu valori reale, iar elementele unitare sunt funcțiile ale căror valori au modulul 1.

(iii) Un exemplu important de C^* -algebră necomutativă este $\mathcal{L}(C^n)$, T^* fiind adjunctul operatorului T . Operatorii autoadjuncți, normali și unitari au fost studiați în capitolul 2. În capitolul următor vom studia C^* -algebra operatorilor liniari și continui definiți pe un spațiu Hilbert infinit dimensional.

(iv) Algebra Banach (cu operația de convoluție) a șirurilor absolut sumabile, $\ell^1(Z)$ este C^* -algebră cu involuția $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$.

(v) Tot conjugarea complexă este involuție și în algebra Banach a șirurilor mărginite, $\ell^\infty(Z)$.

(vi) Mai general, algebra Banach a funcțiilor esențial mărginite, $L^\infty(\Omega, \mu)$ este și ea C^* -algebră comutativă cu conjugarea complexă: $f \rightarrow \bar{f}$; a se vedea exemplul 2(v).

33. Definiție

Într-o algebră Banach, funcția exponențială se poate defini în mod natural prin relația $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, seria din membrul drept fiind absolut convergentă (a se vedea și definiția 27).

Identitatea $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ este adevărată numai în ipoteza că elementele x și y comută între ele. Dacă t este un număr real, atunci e^{it} este un număr complex de modul 1; într-o C^* -algebră această proprietate elementară se generalizează astfel:

34. Lemă

Fie \mathcal{A} o C^* -algebră unitară și fie $h \in \mathcal{A}$ un element autoadjunct.

Atunci elementul $\exp(ih)$ este unitar.

Demonstrație Adjunctul elementului $\exp(ih)$ este:

$$[\exp(ih)]^* = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ih)^n \right]^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} h^n = \exp(-ih),$$

comutarea involuției cu seria fiind justificată de continuitatea involuției (propozi-

tia 31). Deoarece elementele ih și $-ih$ comută între ele, avem:

$$\begin{aligned} [\exp(ih)][\exp(-ih)]^* &= [\exp(ih)][\exp(-ih)] = \exp(ih - ih) = \\ &= e = [\exp(-ih)][\exp(ih)] = [\exp(ih)]^*[\exp(-ih)], \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația.

În capitolul 2 am văzut că operatorii autoadjuncți din $\mathcal{L}(C^n)$ au valori proprii reale, iar din exemplele 9(ii) și 32(ii) rezultă că orice element autoadjunct al algebrei funcțiilor continue are spectru real; în general, avem:

35. Propoziție

Fie \mathcal{A} o C^* -algebră unitară.

(i) Dacă $u \in \mathcal{A}$ este unitar, atunci $\|u\| = 1$ și $\sigma(u) \subseteq \{\lambda \in C; |\lambda| = 1\}$.

(ii) Orice element autoadjunct din \mathcal{A} are spectru real.

Demonstrație (i) Dacă $u \in \mathcal{A}$ este unitar, atunci $u^* = u^{-1}$ și deci $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|e\| = 1$, și deci $\|u\| = 1$. Evident, deoarece u^{-1} este și el unitar, rezultă și $\|u^{-1}\| = 1$. Fie acum $\lambda \in \sigma(u)$; conform observației 8 avem $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$ și deci deoarece $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$, rezultă $|\lambda| \leq 1$ și $|\lambda^{-1}| \leq 1$, adică $|\lambda| = 1$.

(ii) Fie $h \in \mathcal{A}$ autoadjunct; din lema 34 rezultă că $\exp(ih)$ este unitar și deci din (i) rezultă că $\sigma(\exp(ih))$ este inclus în cercul unitate. Din teorema 28 (de transformare a spectrului) aplicată funcției exponențiale rezultă $\sigma(\exp(ih)) = \{e^{i\lambda}; \lambda \in \sigma(h)\}$. În concluzie, am obținut că $\lambda \in \sigma(h) \Rightarrow |e^{i\lambda}| = 1$, adică $\lambda \in R$.

Putem demonstra acum următorul rezultat fundamental în legătură cu reprezentarea C^* -algebrelor comutative unitare.

36. Teoremă (Gelfand-Naimark)

Fie \mathcal{A} o C^* -algebră Banach comutativă unitară. Atunci transformarea Gelfand $\Gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ este un izomorfism de C^* -algebre unitare.

Demonstrație Faptul că Γ este morfism de algebre a fost demonstrat în propoziția 18; mai trebuie deci demonstrate proprietățile:

(a) $\Gamma(x) = \Gamma(x^*)$; reamintim că involuția în algebra funcțiilor continue este conjugarea complexă, cf. exemplului 32(ii).

(b) $\|\Gamma(x)\|_\infty = \|x\|$.

(c) Γ este aplicație surjectivă.

Fie $x \in \mathcal{A}$, $x = h + ik$ cu $h = h^*$ și $k = k^*$; atunci $x^* = h - ik$. Deoarece h și k sunt autoadjuncte, din propoziția 35(ii) rezultă că spectrele lor sunt reale

și deci din teorema 26 rezultă că funcțiile continue $\Gamma(h)$ și $\Gamma(k)$ iau valori reale, deci $\overline{\Gamma(h)} = \Gamma(h)$ și $\overline{\Gamma(k)} = \Gamma(k)$. Din aceste observații rezultă:

$$\overline{\Gamma(x)} = \overline{\Gamma(h + ik)} = \overline{\Gamma(h) + i\Gamma(k)} = \Gamma(h) - i\Gamma(k) = \Gamma(h - ik) = \Gamma(x^*).$$

Pentru a demonstra **(b)**, să observăm mai întâi că într-o C^* -algebră comutativă raza spectrală coincide cu norma; într-adevăr, pentru orice $x \in \mathcal{A}$, avem:

$$\|x^2\|^2 = \|x^2(x^2)^*\| = \|x^2(x^*)^2\| = \|xx^*(xx^*)^*\| = \|xx^*\|^* = \|x\|^4,$$

deci $\|x^2\| = \|x\|^2$; prin inducție rezultă $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Folosind acum formula razei spectrale (teorema 13), rezultă:

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{2^n}\|^{2^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x\|^{2^n})^{2^{-n}} = \|x\|.$$

Punctul **(b)** rezultă acum din teorema 26: $\|\Gamma(x)\|_\infty = r(x) = \|x\|$. Pentru a demonstra **(c)**, observăm mai întâi că $\Gamma(\mathcal{A})$ este o subalgebră închisă în $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$: este subalgebră deoarece Γ este morfism și este închisă deoarece Γ este izometrie (lăsăm detaliile ca exercițiu). Vom demonstra acum că $\Gamma(\mathcal{A})$ este și densă în $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ (ceea ce va încheia demonstrația); pentru aceasta, vom folosi Teorema Stone-Weierstrass (exemplul 2(ii)). Subalgebra $\Gamma(\mathcal{A})$ este închisă la conjugare

(deoarece $\Gamma(x^*) = \overline{\Gamma(x)}$), conține constantele (deoarece $\Gamma(e) = 1$) și separă punctele din $\mathcal{K}(\mathcal{A})$: dacă $\phi, \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ cu $\phi \neq \psi$, atunci există $x \in \mathcal{A}$ astfel încât $\phi(x) \neq \psi(x)$, adică $(\Gamma(x))(\phi) \neq (\Gamma(x))(\psi)$. Ipotezele teoremei Stone-Weierstrass sunt verificate, deci demonstrația este încheiată.

37. Exemplu

Să considerăm C^* -algebra comutativă unitară (cu convoluția) a șirurilor absolut sumabile, $\ell^1(\mathbb{Z})$, (cf. exemplelor 2(vi) și 32(iv)). Am văzut în exemplul 19(ii) că spațiul caracterelor acestei algebre se poate identifica cu cercul unitate, \mathcal{S}^1 , astfel: pentru orice caracter $\psi \in \mathcal{K}(\ell^1(\mathbb{Z}))$, există un unic $\zeta \in \mathcal{S}^1$ astfel încât $\psi(x) = \hat{x}(\zeta)$, unde, \hat{x} este transformarea Fourier a lui x , adică $\hat{x} : \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $\hat{x}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)\lambda^{-n}$. Din teorema lui Gelfand rezultă deci că un șir $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ este inversabil (față de operația de convoluție) dacă și numai dacă transformata sa Gelfand (Fourier) \hat{x} nu se anulează pe cercul unitate (conform condiției de inversabilitate în algebra funcțiilor continue). Obținem astfel următorul rezultat remarcabil:

Teoremă (Wiener)

Fie $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ și fie $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)e^{-int}$; evident, seria este absolut și uniform convergentă pe \mathcal{S}^1 , deci definește o funcție $f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$.

Dacă f nu se anulează pe cercul unitate (deci f este inversabilă în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$) atunci funcția $\frac{1}{f}$ admite și ea o dezvoltare în serie Fourier (de asemenea absolut convergentă), adică există $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ astfel încât:

$$\frac{1}{f}(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n)e^{-int}, \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1.$$

Capitolul 5

Operatori pe spații Hilbert

În acest capitol vom studia operatorii liniari și continui definiți pe un spațiu Hilbert infinit dimensional. Așa cum am văzut în capitolul 3 și în exemplul 2(ii) din cap.4, dacă X este un spațiu Banach, atunci $\mathcal{L}(X)$ este o algebră Banach (necomutativă) unitară. Dacă $X = H$ este spațiu Hilbert, atunci pe $\mathcal{L}(H)$ se poate defini o structură de C^* -algebră, ceea ce permite un studiu mai aprofundat al unor clase speciale de operatori (normali, autoadjuncți, unitari, pozitivi, proiectori). Reamintim că în cazul finit dimensional, $H = C^n$, acest studiu a fost făcut în cap.2. De altfel ideea principală care a stat la baza expunerii ce urmează este de a pune în evidență felul în care dimensiunea infinită a lui H modifică (sau nu) rezultatele importante din capitolul 2.

5.1 Adjunctul unui operator

În continuare H va fi un spațiu Hilbert (complex) infinit dimensional și separabil, iar $\mathcal{L}(H)$ algebra Banach a operatorilor liniari și continui pe spațiul H . În capitolul 2 am asociat oricărui operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator T^* numit adjunctul lui T , urmând ca existența și proprietățile sale să fie demonstrate în contextul unui spațiu Hilbert infinit dimensional. Reamintim de asemenea că în capitolul 3, (teorema 29 și definiția 30) am definit adjunctul unui operator între două spații normate, particularizând apoi definiția pentru spații Hilbert. Demonstrația care urmează este totuși independentă de cea din capitolul 3 (care folosea în mod esențial teorema Hahn-Banach).

1. Propoziție

Pentru orice operator $T \in \mathcal{L}(H)$, există și este unic un operator $T^* \in \mathcal{L}(H)$ cu proprietățile:

(i) $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \forall x, y \in H$.

(ii) $(T^*)^* = T$.

(iii) $\|T\| = \|T^*\|$.

(iv) $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

Operatorul T^* se numește **adjunctul** lui T ; facem precizarea că pentru unicitatea sa este suficientă egalitatea (i).

Demonstrație În continuare vom folosi deseori implicația:

dacă $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle, \forall u \in H$, atunci $v = w$. Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ și fie $y \in H$ un vector arbitrar fixat. Aplicația $f : H \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = \langle Tx, y \rangle$ este o funcțională liniară și continuă pe H (liniaritatea este evidentă iar continuitatea rezultă din inegalitatea: $|\langle Tx, y \rangle| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$). Conform teoremei lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe un spațiu Hilbert (teorema 13, cap.1), există un unic vector $z \in H$ astfel încât $f(x) = \langle x, z \rangle$; evident, z depinde de T și y . Fie operatorul $T^* : H \rightarrow H$, definit prin $T^*y = z$. Este evident că T^* este liniar și că verifică relația (i). Continuitatea lui T^* rezultă din inegalitatea :

$$\|T^*y\|^2 = \langle T^*y, T^*y \rangle = \langle TT^*y, y \rangle \leq \|T\| \|T^*y\| \|y\|, \forall y \in H.$$

Am demonstrat deci că $T^* \in \mathcal{L}(H)$ și $\|T^*y\| \leq \|T\| \|y\|$, ceea ce arată că $\|T^*\| \leq \|T\|$. Pentru a demonstra că T^* este unic cu proprietatea (i), să presupunem prin absurd că există $S \in \mathcal{L}(H), S \neq T^*$, astfel încât $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$. Rezultă așadar că $\langle x, Sy \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ pentru orice $x, y \in H$, deci $S = T^*$, contradicție cu ipoteza.

(ii) Pentru orice $x, y \in H$, avem:

$$\langle x, (T^*)^*y \rangle = \langle T^*x, y \rangle = \overline{\langle y, T^*x \rangle} = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \langle x, Ty \rangle,$$

și deci $(T^*)^* = T$.

(iii) Din inegalitatea $\|T^*\| \leq \|T\|$ (care a fost deja demonstrată), și din (ii) rezultă imediat $\|T^*\| = \|T\|$.

(iv) Din (iii), rezultă inegalitatea $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$. Pentru a demonstra cealaltă inegalitate, fie $x \in H$; avem:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2,$$

și deci $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

2. Propoziție

Dacă $T, S \in \mathcal{L}(H)$, atunci:

(i) $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(ii) $(TS)^* = S^*T^*$.

(iii) Dacă T este inversabil, atunci T^* este inversabil și

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$

(iv) Aplicația $\star : \mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$, $T \rightarrow T^*$ este o involuție pe algebra $\mathcal{L}(H)$ (definiția 29, cap.4); mai mult, din propoziția anterioară (iv), rezultă că $\mathcal{L}(H)$ este o C^* -algebră (necomutativă).

Demonstrație Relația (i) o propunem ca exercițiu.

(ii) Pentru orice $x, y \in H$, avem:

$$\langle TSx, y \rangle = \langle Sx, T^*y \rangle = \langle x, S^*T^*y \rangle,$$

și deci $(TS)^* = S^*T^*$.

(iii) Dacă T este operator inversabil, atunci, folosind relația (ii) pentru operatorii T^* și T^{-1} , obținem:

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^* = I = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*,$$

ceea ce încheie demonstrația. Afirmatia (iv) este o consecință imediată a celor demonstrate anterior.

3. Observație

Desigur, unele din proprietățile demonstrate în propozițiile anterioare sunt cazuri particulare ale rezultatelor corespunzătoare referitoare la C^* -algebre. Conform definiției 29, cap.4, un operator $T \in \mathcal{L}(H)$ se numește **autoadjunct** dacă $T = T^*$, **normal** dacă $TT^* = T^*T$ și **unitar** dacă $TT^* = T^*T = I$.

Reamintim (definiția 7 și exemplul 8(iv), cap.4), că **spectrul** unui operator $T \in \mathcal{L}(H)$ este, prin definiție,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C; \lambda I - T \text{ nu este inversabil}\}.$$

Din teorema 10, cap.4 știm că $\sigma(T)$ este mulțime nevidă și compactă. Din teorema lui Banach (corolarul 41, cap.3), rezultă că

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C; \lambda I - T \text{ nu este bijectiv}\}.$$

În cazul în care spațiul Hilbert H este finit dimensional, $H = C^n$, am văzut în capitolul 2 că

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C; \exists x \neq 0 \text{ astfel încât } Tx = \lambda x\}.$$

Mulțimea $\sigma(T)$ este în acest caz finită și elementele ei se numesc **valori proprii**, iar vectorii $x \neq 0$ care verifică relația $Tx = \lambda x$ se numesc

vectori proprii asociați lui λ . În general, pe un spațiu Hilbert infinit dimensional, mulțimea valorilor proprii (numită și **spectrul punctual** și notată $\sigma_p(T)$) este o submulțime strictă a spectrului, deoarece în acest caz există operatori care sunt injectivi dar nu sunt surjectivi. Așa cum vom vedea în exemplele din paragraful următor, există operatori ale căror spectre punctuale sunt vide (dar, evident, spectrele lor sunt nevide). O altă submulțime remarcabilă a spectrului unui operator este **spectrul punctual aproximativ**, notat $\sigma_{pa}(T)$ și definit prin:

$$\sigma_{pa}(T) = \{\lambda \in C; \exists x_n \in H \text{ astfel încât } \|x_n\| = 1 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - T)x_n = 0\}.$$

Este evident că $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{pa}(T)$, deoarece dacă λ este o valoare proprie, atunci putem lua șirul constant $x_n = x$, unde vectorul x este un vector propriu de normă 1 asociat valorii proprii λ . Incluziunea $\sigma_{pa}(T) \subseteq \sigma(T)$ se demonstrează prin reducere la absurd : dacă $\lambda \in \sigma_{pa}(T)$ dar $\lambda \notin \sigma(T)$, atunci există operatorul $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ și aplicându-l relației

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - T)x_n = 0,$$

obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, contradicție cu $\|x_n\| = 1, \forall n \in N$. Se poate demonstra următorul rezultat ([10],p.40): spectrul unui operator normal este egal cu spectrul punctual aproximativ.

Exemple ilustrative pentru noțiunile introduse aici vor fi date în paragraful următor.

Conform celor demonstrate în propoziția 35,cap.4, operatorii autoadjuncți au spectrul real, iar cei unitari au spectrul inclus în cercul unitate. Am demonstrat de asemenea (obsevația 8,cap.4) că dacă T este un operator inversabil, atunci

$$\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1}; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

4.Definiție

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Un subspațiu $K \subseteq H$ se numește **subspațiu invariant** pentru T dacă $T(K) \subseteq K$; subspațiul K se numește **subspațiu reducător** pentru T dacă $T(K) \subseteq K$ și $T(K^\perp) \subseteq K^\perp$.

5.Propoziție

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ și K un subspațiu în H ; următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) K este subspațiu invariant pentru T .
- (b) K^\perp este subspațiu invariant pentru T^* .

Demonstrația o repetă pe cea din cazul $H = C^n$, (lema 27,cap2).

Evident, de aici rezultă că pentru un operator autoadjunct un subspațiu invariant este și subspațiu reducător.

Reamintim că am notat cu $\text{Ker}(T)$ și $\text{Im}(T)$ **nucleul** și respectiv **imagea** operatorului T . Este evident că subspațiile $\text{Ker}(T)$ și $\text{Im}(T)$ sunt invariante pentru T . În continuare demonstrăm o relație între nucleul unui operator și imagea adjunctului său.

6. Propoziție

Pentru orice operator $T \in \mathcal{L}(H)$, avem:

(i) $\text{Ker}(T) = (\text{Im}(T^*))^\perp$.

(ii) $\text{Ker}(T^*) = (\text{Im}(T))^\perp$.

Demonstrație (i) Fie $x \in \text{Ker}(T)$ și fie $y \in H$; atunci

$\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = 0$ și deci $x \perp \text{Im}(T^*)$. Pentru a demonstra incluziunea inversă fie $x \in (\text{Im}(T^*))^\perp$; atunci, pentru orice $y \in H$, avem $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = 0$ și deci $Tx = 0$, adică $x \in \text{Ker}(T)$. Egalitatea (ii) este o consecință a egalităților (i) și $(T^*)^* = T$.

7. Consecință

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Dacă T și T^* sunt mărginiți inferior, atunci T este operator inversabil.

Demonstrație Reamintim că T se numește mărginit inferior (a se vedea definiția 13, cap.3) dacă există $m > 0$ astfel încât

$$\|Tx\| \geq m \|x\|, \text{ pentru orice } x \in H. \hat{\text{În}} \text{ baza propoziției 14, cap.3, este}$$

suficient să demonstrăm că imagea lui T este un subspațiu dens în H . Deoarece T^* este mărginit inferior, el este injectiv și deci $\text{Ker}(T^*) = 0$. Din propoziția anterioară, rezultă că $(\text{Im}(T))^\perp = 0$ și deci (aici bara înseamnă închiderea) $\overline{(\text{Im}(T))} = (\text{Im}(T))^{\perp\perp} = 0^\perp = H$; pentru prima egalitate am folosit relația $\overline{K} = K^{\perp\perp}$, care este adevărată pentru orice subspațiu $K \subseteq H$ (a se vedea și definiția 7, cap.1).

8. Definiție

Un operator $T \in \mathcal{L}(H)$ se numește **pozitiv** dacă $\langle Tx, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$. Să mai observăm că dacă $T \in \mathcal{L}(H)$ este un operator arbitrar, atunci operatorul T^*T este pozitiv:

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0, \forall x \in H.$$

9. Propoziție

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$.

- (i) Dacă $\langle Tx, x \rangle = 0, \forall x \in H$, atunci $T = O$.
(ii) T este autoadjunct dacă și numai dacă $\langle Tx, x \rangle \in R, \forall x \in H$.
(iii) Dacă T este pozitiv, atunci $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.
(iv) Dacă T este unitar, atunci $\sigma(T) \subseteq \{\lambda; |\lambda| = 1\}$.
(v) Dacă T este inversabil atunci $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1}; \lambda \in \sigma(T)\}$.

Demonstrație (i) Pentru orice $x, y \in H$, din identitatea

$$\langle T(x+y), x+y \rangle = 0,$$

rezultă :

(a) $\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle = 0$.

Înlocuind pe y cu iy în ultima egalitate și înmulțind apoi cu i , obținem:

(b) $\langle Tx, y \rangle - \langle Ty, x \rangle = 0$.

Adunând relațiile (a) și (b) obținem $\langle Tx, y \rangle = 0$, ceea ce încheie demonstrația.

(ii) Dacă T este autoadjunct, atunci pentru orice $x \in H$, avem:

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle},$$

și deci $\langle Tx, x \rangle \in R$. Reciproc, dacă $\langle Tx, x \rangle \in R, \forall x \in H$, atunci, calculând $\langle Tx, y \rangle$ cu relația de polarizare (observația 6(a), cap.1), obținem $\langle Tx, y \rangle = \overline{\langle Ty, x \rangle}$ și deci $T = T^*$. În particular, de aici rezultă că orice operator pozitiv este autoadjunct.

(iii) Dacă T este pozitiv, atunci $\sigma(T) \subset R$. Fie $\lambda < 0$ și $x \in H$; avem:

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - T)x\|^2 &= \langle (\lambda I - T)x, (\lambda I - T)x \rangle = \\ &= \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \langle Tx, x \rangle + \|Tx\|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

ceea ce arată că operatorii $\lambda I - T$ și $(\lambda I - T)^*$ sunt mărginiți în jos (ei sunt egali). Din consecința 7, rezultă acum că $\lambda I - T$ este inversabil și deci $\lambda \notin \sigma(T)$, ceea ce încheie demonstrația.

(iv) și (v) au fost demonstrate în capitolul 4, observația 8 și propoziția 35. Propunem cititorului să găsească și demonstrații directe (pentru operatori) acestor afirmații.

5.2 Proiectori

O clasă importantă de operatori pozitivi, este, ca și în cazul finit dimensional, clasa proiectorilor.

10. Definiție

Un operator $P \in \mathcal{L}(H)$ se numește **proiector** (sau **proiecție**) dacă $P^2 = P = P^*$. Proiectorii sunt operatori pozitivi:

$$\langle Px, x \rangle = \langle P^2x, x \rangle = \langle Px, Px \rangle \geq 0.$$

În cele ce urmează vom folosi în mod esențial descompunerea ortogonală a lui H după un subspațiu închis (teorema 11, cap1). Fie K un subspațiu închis în H și fie $P_K : H \rightarrow H$, $P_K x = y$, unde, $x = y + z$ cu $y \in K$ și $z \in K^\perp$. În teorema următoare vom demonstra că P_K este proiecție și că orice proiecție se poate construi în acest fel.

11. Teoremă

(i) Fie $K \subseteq H$ un subspațiu închis; atunci operatorul P_K definit mai sus este un proiector.

(ii) Reciproc, dacă P este un proiector, atunci există un subspațiu închis $K \subseteq H$ (și anume $K = \text{Im}(P)$) astfel încât $P = P_K$.

Demonstrație (i) Fie $x_\iota = y_\iota + z_\iota$, $\iota \in \{1, 2\}$ doi vectori din H cu descompunerile ortogonale corespunzătoare ($y_\iota \in K$, $z_\iota \in K^\perp$). Dacă $\lambda_\iota \in \mathbb{C}$, $\iota \in 1, 2$, atunci descompunerea ortogonală (unică) a vectorului $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ este:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2),$$

și deci:

$$P_K(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 P_K x_1 + \lambda_2 P_K x_2,$$

ceea ce arată liniaritatea lui P_K . Continuitatea rezultă din:

$$\| P_K x_1 \|^2 = \| y_1 \|^2 \leq \| y_1 \|^2 + \| z_1 \|^2 = \| x_1 \|^2.$$

Din relația de mai sus rezultă și inegalitatea $\| P_K \| \leq 1$. Operatorul P_K este autoadjunct:

$$\langle P_K x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle = \langle x_1, P_K x_2 \rangle.$$

Dacă $y \in K$, atunci descompunerea sa ortogonală este $y = y + 0$, și deci $P_K y = y$. De aici rezultă că pentru orice $x \in H$, $x = y + z$, ($y \in K$, $z \in K^\perp$), avem: $P^2 x = P y = y = P x$, ceea ce arată că P_K este o proiecție având imaginea K .

(ii) Fie acum o proiecție $P \in \mathcal{L}(H)$ și fie $K = \text{Im}(P)$. Evident, K este subspațiu în H ; demonstrăm că este închis. Pentru aceasta, fie $(y_n)_n \subset K$

un șir de vectori din K , convergent la $y \in H$. Din definiția lui K rezultă că există un șir $(x_n)_n \subset H$ astfel încât $y_n = Px_n$; avem:

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Px_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P^2x_n = P(\lim_{n \rightarrow \infty} Px_n) = Py,$$

ceea ce arată că $y \in K$ și deci K este submulțime închisă în H ; în plus, $Py = y$, $\forall y \in K$. Fie acum $z \in K^\perp$. Deoarece $P^2z \in K$, rezultă:

$$\|Pz\|^2 = \langle Pz, Pz \rangle = \langle z, P^2z \rangle = 0,$$

și deci $Pz = 0$. Fie acum $x \in H$, $x = y + z$ cu $y \in K$ și $z \in K^\perp$. Avem:
 $Px = P(y + z) = Py = y = P_Kx$, ceea ce încheie demonstrația.

12. Observație

Fie $P \in \mathcal{L}(H)$ o proiecție și fie $K = \text{Im}(P)$ subspațiul pe care ea proiectează. Atunci operatorul $I - P$ este de asemenea proiecție și $I - P = P_{K^\perp}$, sau, echivalent, $\text{Im}(I - P) = K^\perp$. Evident, proiecțiile P și $I - P$ satisfac relațiile $P + (I - P) = I$ și $P(I - P) = (I - P)P = O$. În general, suma și diferența a două proiecții P și Q nu sunt proiecții; propunem cititorului să demonstreze următoarele echivalențe:

(i) $P + Q$ este proiecție $\iff PQ = QP = O$; în acest caz subspațiul pe care proiectează $P + Q$ este suma (directă) a subspațiilor $\text{Im}(P)$ și $\text{Im}(Q)$.

(ii) $P - Q$ este proiecție $\iff PQ = QP = Q$; în acest caz, $\text{Im}(P - Q)$ este suma (directă) a subspațiilor $\text{Ker}(P)$ și $\text{Im}(Q)$.

13. Definiție

Pe mulțimea operatorilor autoadjuncți se poate defini o relație de ordine (parțială) prin $T \leq S \iff S - T$ este operator pozitiv, adică $\langle (S - T)x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in H$. Demonstrația este imediată. Restricția acestei relații de ordine la mulțimea proiectoarelor coincide cu relația de incluziune între subspațiile imagine ale proiecțiilor, rezultatul fiind conținut în următoarea teoremă. Cel mai mic proiector este operatorul identic nul, O , iar cel mai mare proiector este identitatea, I ; evident, $\|O\| = 0$ și $\|I\| = 1$. Dacă $P \in \mathcal{L}(H)$ este un proiector diferit de O și I , atunci $\|P\| = 1$; inegalitatea $\|P\| \leq 1$ a fost deja arătată în demonstrația teoremei 11. Pentru cealaltă inegalitate, fie $x_o \in \text{Im}(P)$ astfel încât $\|x_o\| = 1$; atunci:

$$\|P\| = \sup_{\|x\|=1} \|Px\| \geq \|Px_o\| = \|x_o\| = 1.$$

14. Teoremă

Fie $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ două proiecții pe subspațiile $\mathcal{X} = \text{Im}(P)$ și respectiv $\mathcal{Y} =$

$\text{Im}(Q)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$.
- (b) $QP = P$.
- (c) $PQ = P$.
- (d) $\|Px\| \leq \|Qx\|$.
- (e) $P \leq Q$.

Demonstrație (a) \implies (b) Dacă $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, atunci pentru orice $x \in H$ avem $Px \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ și deci $QPx = Px$.

(b) \implies (c) Din $QP = P$, rezultă $PQ = P^*Q^* = (QP)^* = P^* = P$.

(c) \implies (d) Din $PQ = P$ și din inegalitatea $\|P\| \leq 1$ (arătată în demonstrația teoremei 11), rezultă:

$$\|Px\| = \|PQx\| \leq \|Qx\|, \forall x \in H$$

(d) \implies (e) Fie $x \in H$; folosind (d), avem:

$$\langle Px, x \rangle = \langle P^2x, x \rangle = \langle Px, Px \rangle = \|Px\|^2 \leq \|Qx\|^2 = \langle Qx, x \rangle.$$

(e) \implies (a) Fie $x \in \mathcal{X}$; din (e), rezultă:

$$\|x\|^2 = \langle Px, x \rangle \leq \langle Qx, x \rangle = \|Qx\|^2 \leq \|x\|^2,$$

ceea ce arată că $\|Qx\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathcal{X}$. Demonstrația se încheie observând că din definiția proiectorilor rezultă egalitatea:

$$\mathcal{Y} = \{y \in H; \|Qy\| = \|y\|\}.$$

În următoarea propoziție dăm legătura dintre subspațiile invariante ale unui operator și proiectorii asociați acestor subspații.

15. Propoziție

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ și fie $P \in \mathcal{L}(H)$ un proiector; atunci:

- (a) $\text{Ker}(P)$ este invariant la $T \iff PT = PTP$.
- (b) $\text{Im}(P)$ este invariant la $T \iff TP = PTP$.

Înainte de a face demonstrația, să observăm că deoarece $\text{Ker}(P)^\perp = \text{Im}(P)$, (conform propoziției 6, P fiind operator autoadjunct), din afirmațiile de mai sus rezultă:

$\text{Ker}(P)$ și $\text{Im}(P)$ sunt subspații reducătoare pentru operatorul T dacă și numai dacă $PT = TP$.

Demonstrație Vom demonstra numai (a), demonstrația pentru (b) fiind

asemănătoare; presupunem că $\text{Ker}(P)$ este subspațiu invariant pentru T . Fie $x \in H$ și fie $y \in \text{Ker}(P)$ și $z \in \text{Im}(P) = \text{Ker}(P)^\perp$ astfel încât $x = y + z$; atunci $Px = z$ și $PTy = 0$ și deci avem:

$$PTx = PT(y + z) = PTy + PTz = PTz = PTPx.$$

Reciproc, dacă $x \in \text{Ker}(P)$, atunci din ipoteză $PTx = PTPx = 0$, ceea ce încheie demonstrația.

Încheiem acest paragraf cu o analogie între algebra operatorilor liniari și continui pe un spațiu Hilbert, $\mathcal{L}(H)$ și corpul numerelor complexe, C .

corpul (comutativ) $C \longleftrightarrow$ algebra (necomutativă) $\mathcal{L}(H)$.

număr complex $z \in C \longleftrightarrow$ operator $T \in \mathcal{L}(H)$.

conjugatul $\bar{z} \longleftrightarrow$ adjunctul T^* .

număr real $a = \bar{a} \longleftrightarrow$ operator autoadjunct $A = A^*$.

număr pozitiv \longleftrightarrow operator pozitiv.

număr de modul 1 $z\bar{z} = 1 \longleftrightarrow$ operator unitar $UU^* = U^*U = I$.

soluțiile ecuației $z^2 = z$ (adică 0 și 1) \longleftrightarrow proiector : $P^2 = P = P^*$.

5.3 Exemple de operatori pe spații Hilbert

Acest paragraf este rezervat studiului unor exemple importante de operatori, dintre care amintim operatorul diagonal, operatorii de translație, operatorii de multiplicare, operatorul integral și de convoluție.

16. Definiție (Operatorul diagonal)

Fie $\ell^2(Z)$ spațiul Hilbert al șirurilor (bilaterale) de pătrat sumabil (cf. exemplului 17(ii), cap.1) și $(\ell^\infty(Z), \|\cdot\|_\infty)$, C^* -algebra comutativă a șirurilor mărginite (cf. exemplului 2(iii), cap.4). Pentru orice șir $\alpha \in \ell^\infty(Z)$, și pentru orice $x \in \ell^2(Z)$, notăm cu αx șirul produs: $(\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n)$, $\forall n \in Z$. Inegalitatea:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(\alpha x)(n)|^2 \leq \|\alpha\|_\infty^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty,$$

arată că $\alpha x \in \ell^2(Z)$. Putem deci defini operatorul:

$$D_\alpha : \ell^2(Z) \longrightarrow \ell^2(Z), D_\alpha x = \alpha x.$$

Vom numi D_α **operatorul diagonal** definit de α . Evident, se poate da o definiție corespunzătoare și pe spațiul $\ell^2(N)$ (în acest caz $\alpha \in \ell^\infty(N)$).

17. Observație

Denumirea de operator diagonal este justificată de următoarea analogie cu cazul finit dimensional. Fie $(\sigma_n)_{n \in Z}$ baza canonică din $\ell^2(Z)$, adică $\sigma_n(k) = 1$ dacă $n = k$ și 0 în rest. Fie $M = (a_{ij})_{i,j \in Z}$ "matricea infinită" a lui D_α în această bază, adică $a_{ij} = \langle D_\alpha \sigma_j, \sigma_i \rangle$. Atunci $a_{ij} = \alpha(i)$, dacă $i = j$ și $a_{ij} = 0$, dacă $i \neq j$.

Reamintim că involuția pe algebra $\ell^\infty(Z)$ este $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$, (aici bara înseamnă conjugarea complexă), iar spectrul în această algebră este $\sigma(\alpha) = \{\alpha(n); n \in Z\}$, (aici bara înseamnă închiderea mulțimii, deci în cazul nostru este formată din termenii șirului α la care se adaugă punctele limită ale șirului), conform exemplului 9(v), cap.4.

Proprietățile operatorului diagonal sunt cuprinse în următoarea teoremă.

18. Teoremă (proprietățile operatorului diagonal)

(a) Pentru orice $\alpha, \beta \in \ell^\infty(Z)$ și $a, b \in C$, avem:

$$aD_\alpha + bD_\beta = D_{a\alpha + b\beta} \text{ și } D_\alpha D_\beta = D_{\alpha\beta}.$$

(b) Operatorul D_α este liniar și continuu.

(c) $\|D_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.

(d) $(D_\alpha)^* = D_{\bar{\alpha}}$. De aici rezultă că operatorul diagonal este normal și în plus avem următoarele caracterizări:

$$D_\alpha \text{ este autoadjunct} \iff \alpha(n) \in R, \forall n \in Z;$$

$$D_\alpha \text{ este pozitiv} \iff \alpha(n) \geq 0, \forall n \in Z.$$

$$D_\alpha \text{ este unitar} \iff |\alpha(n)| = 1, \forall n \in Z.$$

$$D_\alpha \text{ este proiector} \iff \alpha(n) = 0 \text{ sau } 1, \forall n \in Z \text{ (sau } \alpha^2 = \alpha).$$

(e) Operatorul D_α este inversabil (în algebra $\mathcal{L}(\ell^2(Z))$) dacă și numai dacă șirul α este inversabil (în algebra $\ell^\infty(Z)$). În consecință, avem:

$$\sigma(D_\alpha) = \overline{\{\alpha(n); n \in Z\}} = \sigma(\alpha).$$

În plus, spectrul punctual (mulțimea valorilor proprii) al operatorului diagonal este $\sigma_p(D_\alpha) = \{\alpha(n); n \in Z\}$.

Înainte de a face demonstrația, să comparăm cu cazul finit dimensional: acolo valorile proprii erau numerele de pe diagonala principală a matricei operatorului în baza canonică (în cazul infinit dimensional, termenii șirului α); în

plus, acum apar în spectru punctele limită ale "diagonalei" (și care, în general, nu sunt valori proprii), dar care sunt în spectrul punctual aproximativ întrucât D_α este operator normal, (a se vedea observația 3).

Demonstrație Afirmațiile de la punctul (a) sunt evidente.

(b) și (c) Liniaritatea este imediată. Din inegalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(\alpha x)(n)|^2 \leq \| \alpha \|_\infty^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty,$$

rezultă că $\| D_\alpha x \|_2 \leq \| \alpha \|_\infty \| x \|_2$ și deci (folosind propoziția 3, cap.3), obținem continuitatea lui D_α și inegalitatea $\| D_\alpha \| \leq \| \alpha \|_\infty$. Pentru a demonstra inegalitatea inversă, să observăm mai întâi că dacă $(\sigma_n)_{n \in Z}$ este baza canonică din $\ell^2(Z)$, atunci $D_\alpha \sigma_n = \alpha(n) \sigma_n$; rezultă:

$$|\alpha(n)| = \| \alpha(n) \sigma_n \|_2 = \| D_\alpha \sigma_n \|_2 \leq \| D_\alpha \| \| \sigma_n \|_2 = \| D_\alpha \|.$$

Luând supremum după $n \in Z$ în inegalitatea de mai sus, demonstrația se încheie.

(d) Pentru orice șiruri x și y din $\ell^2(Z)$, avem:

$$\langle D_\alpha x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(n) x(n) \overline{y(n)} = \langle x, \overline{\alpha} y \rangle = \langle x, D_{\overline{\alpha}} y \rangle,$$

ceea ce arată că $(D_\alpha)^* = D_{\overline{\alpha}}$. Celelalte afirmații sunt imediate.

(e) Să presupunem mai întâi că șirul α este inversabil: există deci $\beta \in \ell^\infty(Z)$ astfel încât $\alpha(n) \beta(n) = 1, \forall n \in Z$. Atunci operatorul D_β este liniar și continuu și $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha = I$; deci $D_\beta = (D_\alpha)^{-1}$. Reciproc, dacă operatorul D_α este inversabil, atunci $(D_\alpha)^{-1}(\alpha(n) \sigma_n) = \sigma_n$, și deci:

$$(D_\alpha)^{-1} \sigma_n = \frac{1}{\alpha(n)} \sigma_n.$$

De aici, trecând la norme, obținem:

$$\| \frac{1}{\alpha(n)} \sigma_n \|_2 = \| (D_\alpha)^{-1} \sigma_n \|_2 \leq \| (D_\alpha)^{-1} \| \| \sigma_n \|_2 = \| (D_\alpha)^{-1} \| < \infty,$$

ceea ce implică $|\frac{1}{\alpha(n)}| \leq \| (D_\alpha)^{-1} \|, \forall n \in Z$; în concluzie șirul $\frac{1}{\alpha}$ este mărginit și deci α este inversabil.

Notând cu $\mathbf{1} \in \ell^\infty(Z)$ șirul constant 1, avem $\lambda I - D_\alpha = D_{\lambda \mathbf{1} - \alpha}, \forall \lambda \in C$. Rezultă deci că operatorul $\lambda I - D_\alpha$ este inversabil dacă și numai dacă șirul $\lambda \mathbf{1} - \alpha$ este inversabil, deci $\sigma(D_\alpha) = \sigma(\alpha)$; acesta din urmă a fost însă calculat în exemplul 9(v), cap.4 și este $\{\alpha(n); n \in Z\}$.

Demonstrăm acum egalitatea $\sigma_p(D_\alpha) = \{\alpha(n); n \in Z\}$. Pentru orice n fixat în Z , fie $x_n \in \ell^2(Z)$ definit prin $x_n(k) = \alpha(n)$ pentru $k = n$ și 0 pentru $k \neq n$. Atunci $((\alpha(n)I - D_\alpha)x_n)(k) = 0, \forall k \in Z$ și deci numărul $\alpha(n)$ este valoare proprie a operatorului D_α , iar x_n este un vector propriu asociat acestei valori proprii. Pentru a demonstra incluziunea reciprocă, fie $\lambda \in \sigma_p(D_\alpha)$ și fie $x \in \ell^2(Z)$ astfel încât x nu este șirul identic nul și $((\lambda I - D_\alpha)x)(n) = 0, \forall n \in Z$. Presupunând prin absurd că $\lambda \neq \alpha(n), \forall n \in Z$, din egalitatea

$$(\lambda - \alpha(n))x(n) = 0, \forall n \in Z,$$

obținem $x(n) = 0, \forall n \in Z$, contradicție.

19. Obsevație

În cursul demonstrației teoremei anterioare, am arătat că aplicația $\ell^\infty(Z) \ni \alpha \rightarrow D_\alpha \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$ este un morfism injectiv (chiar izometric) de C^* -algebre, având drept imagine subalgebra operatorilor diagonali. Rezultă că subalgebra operatorilor diagonali este o C^* -subalgebră comutativă în $\mathcal{L}(\ell^2(Z))$, (în particular, este deci completă) fiind izomorfă cu C^* -algebra comutativă $\ell^\infty(Z)$. O consecință a acestui fapt este că limita unui șir convergent de operatori diagonali este tot un operator diagonal.

Bineînțeles, operatorii diagonali pe spațiul Hilbert $\ell^2(N)$ au proprietăți similare. De exemplu, dacă $\alpha(n) = \frac{1}{n+1}, \forall n \in N$, atunci operatorul diagonal asociat $D_\alpha \in \mathcal{L}(\ell^2(N))$ este autoadjunct, $\|D_\alpha\| = 1$ și $\sigma(D_\alpha) = \{\frac{1}{n+1}; n \in N\} \cup \{0\}$; evident, operatorul D_α nu este inversabil în acest caz.

20. Definiție (operatorul de translație unilateral)

Pe spațiul Hilbert $\ell^2(N)$ considerăm operatorul:

$$V : \ell^2(N) \rightarrow \ell^2(N), (Vx)(0) = 0 \text{ și } (Vx)(n) = x(n-1), \forall n \geq 1.$$

Este evident că definiția este corectă ($Vx \in \ell^2(N)$). Operatorul V se numește **operatorul de translație unilateral**, (unilateral shift); în teoria sistemelor V este denumit **întârziere ideală** (ideal delay).

Înainte de a enunța și demonstra proprietățile operatorului V , vom face o observație cu caracter general în legătură cu spectrul unui operator.

21. Observație

Fie H un spațiu Hilbert și fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Dacă $\lambda \in \sigma_p(T^*)$, atunci, prin definiție, există $x \in H, x \neq 0$ astfel încât $T^*x = \lambda x$; avem deci:

$$\{0\} \neq \text{Ker}(\lambda I - T^*) = (\text{Im}((\lambda I - T^*)^*))^\perp = (\text{Im}(\bar{\lambda}I - T))^\perp,$$

ceea ce arată că $\text{Im}(\bar{\lambda}I - T) \neq H$, deci operatorul $\bar{\lambda}I - T$ nu este surjectiv. Am demonstrat deci:

Dacă $\lambda \in C$ este valoare proprie pentru T^* , atunci $\bar{\lambda} \in \sigma(T)$.

22. Teoremă (proprietățile operatorului de translație unilateral)

Fie $V : \ell^2(N) \rightarrow \ell^2(N)$ operatorul de translație unilateral; atunci:

(a) V este liniar și continuu.

(b) V este o izometrie: $\|Vx\|_2 = \|x\|_2, \forall x \in \ell^2(N)$.

De aici rezultă, în particular, că $\|V\| = 1$.

(c) V nu este operator inversabil (nu este surjectiv).

(d) $(V^*x)(n) = x(n+1), \forall x \in \ell^2(N), \forall n \in N$ și $\|V^*\| = 1$.

(e) $V^*V = I$ dar $VV^* \neq I$.

(f) Operatorul V nu are valori proprii: $\sigma_p(V) = \emptyset$.

(g) $\sigma_p(V^*) = \{\lambda \in C; |\lambda| < 1\}$ și $\sigma(V) = \sigma(V^*) = \{\lambda \in C; |\lambda| \leq 1\}$.

Înainte de demonstrație, să observăm că pe spații finit dimensionale nu există endomorfisme injective care să nu fie surjective (de fapt operatorul V este mai mult decât injectiv, este o izometrie); dimpotrivă, în cazul finit dimensional orice izometrie este operator unitar. Este de asemenea de reținut faptul că V nu are valori proprii, în timp ce în cazul unui operator definit pe un spațiu finit dimensional spectrul este format numai din valori proprii.

Demonstrație Prin definiție, V acționează astfel:

$$\ell^2(N) \ni x = (x(0), x(1), x(2), \dots) \rightarrow (0, x(0), x(1), \dots) = Vx \in \ell^2(N).$$

(a),(b),(c) Liniaritatea o lășăm ca exercițiu. Este evident (din schema de mai sus) că $\|Vx\|_2 = \|x\|_2$, și deci V este izometrie. Operatorul V nu este surjectiv deoarece $\text{Im}(V) = \{x \in \ell^2(N); x(0) = 0\} \neq \ell^2(N)$ de exemplu, nu există $x \in \ell^2(N)$ astfel încât $Vx = \sigma_o$.

(d) Pentru orice $x, y \in \ell^2(N)$, avem:

$$\langle Vx, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (Vx)(n) \overline{y(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n-1) \overline{y(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \overline{y(n+1)},$$

ceea ce arată că adjunctul lui V este:

$$\ell^2(N) \ni y = (y(0), y(1), y(2), \dots) \rightarrow V^*y = (y(1), y(2), y(3), \dots) \in \ell^2(N).$$

Este evident că pentru orice $x \in \ell^2(N)$ avem $\|V^*x\|_2 \leq \|x\|_2$, deci $\|V^*\| \leq 1$. Dar $\|V^*\sigma_1\|_2 = \|\sigma_o\|_2 = 1$, deci $\|V^*\| = 1$.

(e) Este clar că $V^*V = I$; dar, pentru orice $x \in \ell^2(N)$ cu proprietatea că $x(0) \neq 0$, avem $VV^*x \neq x$.

(f) Arătăm acum că V nu are valori proprii. Fie, prin absurd, $\lambda \in C$ astfel încât există $x \in \ell^2(N)$, $x \neq 0$, cu proprietatea $Vx = \lambda x$, adică:

$$(0, x(0), x(1), x(2), \dots) = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), \dots).$$

De aici rezultă $x(n) = 0$, $\forall n \in N$, contradicție cu $x \neq 0$.

Am demonstrat deci că $\sigma_p(V) = \emptyset$.

(g) Deoarece $\|V\| = \|V^*\| = 1$, rezultă că spectrele operatorilor V și V^* sunt incluse în discul unitate închis. Vom arăta mai întâi că $\sigma_p(V^*) = \{\lambda \in C; |\lambda| < 1\}$. Din egalitatea $V^*x = \lambda x$, rezultă:

$$(x(1), x(2), x(3), \dots) = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), \dots),$$

și deci $x(n+1) = \lambda^n x(0)$, $\forall n \in N$. Dacă $x(0) = 0$, atunci $x = 0$. Rezultă deci că vectorii proprii x asociați valorii proprii λ sunt de forma:

$$x = (x(0), \lambda x(0), \lambda^2 x(0), \lambda^3 x(0), \dots), \text{ cu condiția } x(0) \neq 0.$$

Există însă restricția $x \in \ell^2(N)$, ceea ce este echivalent cu $|\lambda| < 1$. Am demonstrat deci că:

$$\sigma_p(V^*) = \{\lambda \in C; |\lambda| < 1\}.$$

Din observația 21 de mai sus, rezultă că $\sigma(V) \supseteq \sigma_p(V^*)$. În concluzie, spectrele operatorilor V și V^* conțin discul unitate deschis și sunt conținute în discul unitate închis. Cum spectrul este mulțime închisă, rezultă că spectrele celor doi operatori sunt egale cu discul unitate închis.

23. Definiție (operatorul de translație bilateral)

Pe spațiul Hilbert $\ell^2(Z)$ considerăm aplicația:

$$W : \ell^2(Z) \rightarrow \ell^2(Z), (Wx)(n) = x(n-1), \forall n \in Z.$$

Este clar că $Wx \in \ell^2(Z)$, $\forall x \in \ell^2(Z)$. Operatorul W se numește **operatorul de translație bilateral**. Așa cum vom vedea în teorema următoare, proprietățile sale sunt în mod esențial diferite de cele ale operatorului de translație unilateral.

24. Teoremă (proprietățile operatorului de translație bilateral)

(a) W este liniar și continuu.

(b) Adjunctul lui W este $(W^*x)(n) = x(n+1)$, $\forall n \in Z$.

(c) W este operator unitar: $WW^* = W^*W = I$.

În particular, $\|W\| = \|W^*\| = 1$.

(d) Operatorii W și W^* nu au valori proprii;

(e) $\sigma(W) = \sigma_{pa}(W) = \sigma(W^*) = \sigma_{pa}(W^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$.

Reamintim că σ_{pa} este spectrul punctual aproximativ (a se vedea observația 3 și teorema 18 din acest capitol).

Demonstrație (a) Liniaritatea este imediată; continuitatea rezultă din relația evidentă: $\|Wx\|_2 = \|x\|_2$.

(b) Pentru orice $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z})$, avem:

$$\langle Wx, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n-1) \overline{y(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \overline{y(n+1)},$$

și deci într-adevăr $(W^*x)(n) = x(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(c) Egalitățile $WW^* = W^*W = I$ sunt evidente.

(d) Vom demonstra că W nu are valori proprii (analog se arată și pentru W^*). Presupunem prin absurd că există $\lambda \in \mathbb{C}$ și

$x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $x \neq 0$ astfel încât $Wx = \lambda x$, adică $x(n-1) = \lambda x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Rezultă deci că $x(n) = \lambda^{-n}x(0)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Dar $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ și deci seriile geometrice:

$$\sum_{n=-\infty}^0 |x(0)|^2 |\lambda|^{-2n} \text{ și } \sum_{n=0}^{\infty} |x(0)|^2 |\lambda|^{-2n}$$

trebuie să fie simultan convergente; acest lucru este posibil numai dacă $x(0) = 0$, adică $x = 0$, contradicție.

(e) Faptul că spectrele operatorilor W și W^* sunt incluse în cercul unitate rezultă din proprietatea că într-o C^* -algebră spectrul oricărui element unitar este inclus în cercul unitate (propoziția 35, cap.4).

Demonstrația care urmează este totuși independentă de această proprietate. Demonstrăm că spectrul punctual aproximativ al lui W este egal cu cercul unitate. Fie $\lambda = e^{it}$ și fie $x_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$, șirul definit prin:

$$x_n(k) = (2n+1)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikt} \text{ pentru } |k| \leq n \text{ și } x_n(k) = 0 \text{ în rest.}$$

Propunem cititorului să arate că $\|x_n\|_2 = 1$ și:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda I - W)x_n\|_2 = 0.$$

Analog se calculează și $\sigma_{pa}(W^*)$. Cum $\sigma(W)$ și $\sigma(W^*)$ sunt incluse în cercul unitate, demonstrația este încheiată.

O clasă importantă de operatori este clasa operatorilor de multiplicare; un caz particular a fost deja prezentat: operatorul diagonal pe spațiul $\ell^2(\mathbb{Z})$. În continuare, vom da definiția generală a acestor

operatori.

25. Definiție

Fie (Ω, μ) un spațiu cu măsură (pozitivă); fie $L^2(\Omega, \mu)$ spațiul Hilbert al funcțiilor de pătrat integrabil definite pe Ω , (cf. exemplului 17(iii), cap.1) și fie $L^\infty(\Omega, \mu)$, C^* - algebra comutativă a funcțiilor esențial mărginite pe Ω , (cf. exemplului 32(vi), cap.3). Pentru orice $f \in L^2(\Omega, \mu)$ și pentru orice $\psi \in L^\infty(\Omega, \mu)$, definim funcția produs $(\psi f)(t) = \psi(t)f(t)$, $\forall t \in \Omega$; avem:

$$\|\psi f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |\psi f|^2 d\mu} \leq \|\psi\|_{\infty} \|f\|_2,$$

deci $\psi f \in L^2(\Omega, \mu)$. Rezultă deci că pentru orice $\psi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ putem defini aplicația:

$$M_\psi : L^2(\Omega, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mu), M_\psi f = \psi f.$$

Operatorul M_ψ se numește **operatorul de multiplicare** (sau **operatorul de înmulțire**) cu ψ ; funcția ψ se numește **multiplicator**. Operatorul diagonal D_α (cf. definiției 16) se obține în cazul particular $\Omega = Z$, măsura μ este măsura de numărare și $\psi = \alpha$.

26. Definiție

Un alt caz particular remarcabil (pe care-l vom studia în continuare) este $\Omega = \mathcal{S}^1 = \{\lambda \in C; |\lambda| = 1\}$ și măsura μ măsura Lebesgue pe cercul unitate. Notăm $L^2(\mathcal{S}^1)$ spațiul Hilbert al funcțiilor de pătrat integrabil pe cerc cu produsul scalar $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$ (cf. exemplului 17(iii), cap.1) și cu $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ C^* -algebra comutativă a funcțiilor esențial mărginite pe cerc (cf. exemplului 2(v), cap.4). Pentru orice $\psi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ notăm cu M_ψ operatorul de multiplicare pe $L^2(\mathcal{S}^1)$: $(M_\psi f)(e^{it}) = \psi(e^{it})f(e^{it})$, $\forall e^{it} \in \mathcal{S}^1$.

Vom studia acum operatorii de multiplicare pe spațiul Hilbert al funcțiilor de pătrat integrabil definite pe cercul unitate, $L^2(\mathcal{S}^1)$.

Menționăm totuși că rezultatele ce urmează sunt adevărate și în cazul (general) al operatorilor de multiplicare pe spațiul Hilbert $L^2(\Omega, \mu)$. Demonstrațiile care vor urma se adaptează (așa cum vom preciza) ușor cazului general.

27. Propoziție (proprietățile operatorului de multiplicare)

Fie $\psi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ și M_ψ operatorul de multiplicare corespunzător; atunci:

- (a) M_ψ este liniar și continuu și $\|M_\psi\| = \|\psi\|_{\infty}$.
- (b) $M_\psi M_\phi = M_\phi M_\psi = M_{\psi\phi}$, $\forall \phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$.

- (c) $(M_\psi)^* = M_{\bar{\psi}}$ și M_ψ este operator normal.
 (d) M_ψ este operator autoadjunct dacă și numai dacă funcția ψ ia valori reale: $\psi = \bar{\psi}$.
 (e) M_ψ este operator pozitiv dacă și numai dacă funcția ψ ia valori pozitive: $\psi(e^{it}) \geq 0, \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1$.
 (f) M_ψ este operator unitar dacă și numai dacă funcția ψ ia valori de modul 1: $|\psi(e^{it})| = 1, \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1$.
 (g) M_ψ este proiector dacă și numai dacă funcția ψ este funcția caracteristică a unei submulțimi măsurabile de pe cerc (deci ψ ia numai valorile 0 și 1, sau, echivalent, $\psi^2 = \psi$).
- Demonstrație (a)** Liniaritatea este evidentă; calculăm norma lui M_ψ . Pentru orice $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, avem:

$$\| M_\psi f \|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\psi(e^{it})f(e^{it})|^2 dt} \leq \| \psi \|_\infty \| f \|_2,$$

și deci am obținut inegalitatea: $\| M_\psi \| \leq \| \psi \|_\infty$. Pentru a demonstra și inegalitatea inversă, considerăm, pentru orice $n \in N$ mulțimea:

$$A_n = \{e^{it} \in \mathcal{S}^1; |\psi(e^{it})| \geq \| \psi \|_\infty - \frac{1}{n}\}.$$

Din definiția supremumului esențial, rezultă că măsura mulțimii A_n este nenulă (pentru orice $n \in N$). Dacă χ_n este funcția caracteristică a mulțimii A_n , atunci $\chi_n \in L^2(\mathcal{S}^1)$ și:

$$\| \chi_n \|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\chi_n|^2 dt} = \sqrt{\mu(A_n)},$$

unde, $\mu(A_n)$ este măsura (Lebesgue pe cerc) a mulțimii A_n . Rezultă:

$$\begin{aligned} \| M_\psi \chi_n \|_2 &= \sqrt{\int_0^{2\pi} |\psi \chi_n|^2 dt} \geq \\ &\geq \sqrt{\int_0^{2\pi} (\| \psi \|_\infty - \frac{1}{n})^2 |\chi_n|^2 dt} \geq (\| \psi \|_\infty - \frac{1}{n}) \| \chi_n \|_2. \end{aligned}$$

Rezultă deci că:

$$\| M_\psi \| \geq \| \psi \|_\infty - \frac{1}{n}, \forall n \in N,$$

deci $\| M_\psi \| \geq \| \psi \|_\infty$.

(b) Pentru orice $\psi, \phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, avem:

$$M_\psi M_\phi f = M_\psi(\phi f) = \psi \phi f = M_{\psi \phi} f = M_{\phi \psi} f,$$

pentru orice $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$.

(c) Dacă $f, g \in L^2(\mathcal{S}^1)$, atunci:

$$\langle M_\psi f, g \rangle = \int_0^{2\pi} (\psi f) \bar{g} dt = \int_0^{2\pi} f \overline{(\bar{\psi} g)} dt = \langle f, M_{\bar{\psi}} g \rangle,$$

și deci $(M_\psi)^* = M_{\bar{\psi}}$; operatorii de multiplicare comută toți între ei, deci M_ψ și $M_{\bar{\psi}}$ comută, adică M_ψ este operator normal.

Celelalte afirmații sunt ușor de demonstrat; de exemplu, pentru a demonstra (f), să presunem mai întâi că M_ψ este unitar; atunci, din egalitatea $M_\psi M_{\bar{\psi}} = I$, rezultă $\psi \bar{\psi} = 1$. Reciproc, dacă $|\psi| = 1$, atunci, funcția $\frac{1}{\psi} = \bar{\psi}$ este esențial mărginită și deci putem considera operatorul $M_{\frac{1}{\psi}}$, care este și inversul, dar și adjunctul lui M_ψ .

28. Observație

Raționamentele de mai sus se pot reface, întocmai, și în cazul unui spațiu cu măsură arbitrar, (Ω, μ) cu proprietatea $\mu(\Omega) = 1$ și, mai general, pentru un spațiu cu măsură finită: $\mu(\Omega) < \infty$. Dacă

$\mu(\Omega) = \infty$, atunci, singura eroare în demonstrația de mai sus ar fi aceea că mulțimea A_n ar putea avea măsură infinită: $\mu(A_n) = \infty$ și deci inegalitatea $\|M_\psi\| \geq \|\psi\|_\infty$ nu mai este adevărată. Pentru ca demonstrația să fie corectă și în acest caz, este suficient să existe o submulțime în $B_n \subset A_n$, care să fie măsurabilă de măsură finită; raționamentul s-ar putea atunci face pentru B_n în loc de A_n (și χ_{B_n} în loc de χ_{A_n} , etc). Pentru aceasta, trebuie ca măsura μ să aibă următoarea proprietate: în orice mulțime măsurabilă (de măsură infinită) să existe o submulțime măsurabilă de măsură finită (o măsură cu această proprietate se numește local finită). O proprietate uzuală care implică local-finitudinea măsurii μ este ca ea să fie σ -finită, adică: există un șir de mulțimi măsurabile $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietățile:

$$\mu(D_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N} \text{ și } \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

De exemplu, măsura Lebesgue pe \mathbb{R} este σ -finită, pentru că

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n).$$

Calculul spectrului operatorului de multiplicare necesită câteva rezultate preliminare; rezultatul fundamental în această direcție este că operatorul M_ϕ este inversabil dacă și numai dacă funcția ϕ este inversabilă în algebra $L^\infty(\Omega, \mu)$. Suficiența condiției de inversabilitate pentru M_ϕ admite o demonstrație simplă; vom face demonstrația pentru $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, dar ca și mai sus, ea se poate adapta fără dificultăți la cazul general.

Reamintim că o funcție $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ este inversabilă dacă și numai dacă există $m > 0$ astfel încât $|\phi(u)| \geq m, \forall u \in \Omega$ (a.p.t.), (exemplul 9(vi), cap.4);

am demonstrat de asemenea că $\sigma(\phi) = \text{essran}(\phi)$.

29. Propoziție

Dacă funcția $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ este inversabilă, atunci operatorul de multiplicare M_ϕ este inversabil.

Demonstrație Dacă funcția $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ este inversabilă, atunci funcția $\frac{1}{\phi}$ este în algebra $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ și deci operatorul de multiplicare cu $\frac{1}{\phi}$ este inversul căutat: $M_\phi M_{\frac{1}{\phi}} = I$.

30. Consecință

Dacă $\lambda \in \sigma(M_\phi)$, atunci $\lambda I - M_\phi$ nu este inversabil și deci din propoziția anterioară rezultă că funcția $\lambda - \phi$ nu este inversabilă în algebra $L^\infty(\mathcal{S}^1)$; concluzie: $\sigma(M_\phi) \subseteq \sigma(\phi) = \text{essran}(\phi)$, (cf. exemplului 9.(vi), cap.4). În particular, dacă ϕ este o funcție continuă pe \mathcal{S}^1 atunci $\sigma(M_\phi) \subseteq \phi(\mathcal{S}^1)$.

Pentru a demonstra reciproca propoziției 29 (ceea ce ar rezolva problema calculului spectrului operatorului de multiplicare), avem nevoie de două rezultate auxiliare; ca de obicei, demonstrațiile vor fi prezentate în cazul $\Omega = \mathcal{S}^1$, dar raționamentele sunt corecte și pentru un spațiu cu măsură σ – finită, (Ω, μ) .

31. Lemă

Fie $\phi : \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, o funcție măsurabilă arbitrară.

Dacă $\phi f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, $\forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ și dacă operatorul

$$T : L^2(\mathcal{S}^1) \rightarrow L^2(\mathcal{S}^1), Tf = \phi f$$

este continuu, atunci $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ și $\|\phi\|_\infty \leq \|T\|$.

Demonstrație Vom demonstra că $|\phi| \leq \|T\|$ (a.p.t.); de aici va rezulta că $\|\phi\|_\infty \leq \|T\|$ (a se vedea exemplul 4(vi).cap.1). Fie $M \subseteq \mathcal{S}^1$ o mulțime măsurabilă astfel încât $|\phi(z)| > \|T\|$, $\forall z \in M$; demonstrația se încheie dacă demonstrăm că $\mu(M) = 0$ (aici am notat cu μ măsura Lebesgue pe cerc). Fie χ_M funcția caracteristică a mulțimii M . Dacă prin absurd $\chi_M \neq 0$ a.p.t., atunci:

$$\|T\chi_M\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\phi\chi_M|^2 dt} = \sqrt{\int_M |\phi|^2 dt} > \|T\| \|\chi_M\|_2,$$

ceea ce este o contradicție.

În demonstrația de mai sus am folosit ipoteza de continuitate a operatorului T ; vom arăta în continuare că această ipoteză nu este necesară.

32.Lemă

Fie $\phi : \mathcal{S}^1 \rightarrow C$ o funcție măsurabilă arbitrară.

Dacă $\phi f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, $\forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, atunci $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$.

Demonstrație Să considerăm operatorul (liniar)

$$T : L^2(\mathcal{S}^1) \rightarrow L^2(\mathcal{S}^1), Tf = \phi f.$$

Este suficient să demonstrăm că T este continuu: din lema precedentă va rezulta apoi că ϕ este funcție esențial mărginită. Pentru aceasta, vom folosi teorema graficului închis (teorema 45,cap.3): dacă T este operator închis, atunci el este continuu. Pentru a demonstra că T este operator închis, fie $(f_n)_n$ un șir de funcții din $L^2(\mathcal{S}^1)$ cu proprietățile (a se vedea observația 44,cap.3):

(i) f_n converge (în $L^2(\mathcal{S}^1)$) la f .

(ii) ϕf_n converge (în $L^2(\mathcal{S}^1)$) la g .

Demonstrația se va încheia dacă vom demonstra că g este în imaginea operatorului T , adică $g = \phi f$. Se știe că dacă un șir de funcții $(h_n)_n$ converge în norma $\| \cdot \|_p$ (de fapt noi vom folosi aici cazul $p = 2$), la funcția h , atunci există un subșir al lui $(h_n)_n$ care converge punctual (a.p.t.) la h ([17],p.201). Din această cauză, putem presupune că șirul $(f_n)_n$ converge și punctual (a.p.t.) la f . Rezultă deci că șirul $(\phi f_n)_n$ converge punctual (a.p.t.) la funcția ϕf ; dar, deoarece șirul $(\phi f_n)_n$ converge în norma $\| \cdot \|_2$ la g , rezultă, cu același raționament ca mai sus că $(\phi f_n)_n$ converge și punctual (a.p.t.) la g . În concluzie, $g = \phi f$.

Putem demonstra acum reciproca propoziției 29, și deci avem:

33.Teoremă (spectrul operatorului de multiplicare)

Fie $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ și fie M_ϕ operatorul de multiplicare asociat lui ϕ pe spațiul $L^2(\mathcal{S}^1)$.

Atunci M_ϕ este operator inversabil dacă și numai dacă funcția ϕ este inversabilă (în algebra $L^\infty(\mathcal{S}^1)$); consecințe:

(a) Spectrul operatorului M_ϕ coincide cu imaginea esențială a funcției ϕ ; (a se vedea exemplul 9(vi),cap.4).

(b) Raza spectrală și norma operatorului de multiplicare sunt egale:

$$r(M_\phi) = \| M_\phi \| .$$

Demonstrație Implicația ϕ inversabilă $\Rightarrow M_\phi$ inversabil a fost demonstrată în propoziția 29.

Să presupunem acum că operatorul M_ϕ este inversabil, deci există $T \in$

$\mathcal{L}(L^2(\mathcal{S}^1))$ astfel încât $TM_\phi f = M_\phi T f = f, \forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$. Rezultă deci că $\phi T f = f, \forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, adică:

$$T f = \frac{1}{\phi} f, \forall f \in L^2(\mathcal{S}^1).$$

Deoarece operatorul T este continuu, din lemele anterioare rezultă că funcția $\frac{1}{\phi}$ este în $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ și $\|\frac{1}{\phi}\|_\infty \leq \|T\|$. În concluzie, ϕ este inversabilă în algebra $L^\infty(\mathcal{S}^1)$, inversa ei fiind $\frac{1}{\phi} \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$.

(a) rezultă imediat aplicând rezultatul demonstrat mai sus operatorului $\lambda I - M_\phi = M_{\lambda - \phi}$.

(b) rezultă din (a) și din definiția razei spectrale:

$$r(M_\phi) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(M_\phi)\};$$

a se vedea definiția 12, cap.4.

34. Observație

Dacă funcția ϕ este continuă pe cerc, atunci operatorul M_ϕ este inversabil dacă și numai dacă $\phi(e^{it}) \neq 0, \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1$, (a se vedea exemplul 9(vi), cap.4). Rezultă deci că în acest caz spectrul operatorului M_ϕ coincide cu imaginea funcției ϕ . De exemplu, dacă $\phi(e^{it}) = e^{it} - 2$, atunci:

$$\sigma(M_\phi) = \text{essran}(\phi) = \phi(\mathcal{S}^1) = \{\lambda \in C; |\lambda + 2| = 1\}.$$

În particular, operatorul M_ϕ este inversabil (deoarece $0 \notin \sigma(M_\phi)$) și inversul său este:

$$((M_\phi)^{-1} f)(e^{it}) = \frac{1}{e^{it} - 2} f(e^{it}), \forall f \in L^2(\mathcal{S}^1).$$

Să considerăm acum un exemplu în care funcția multiplicator nu este continuă; fie, de exemplu:

$$\psi(e^{it}) = \frac{e^{it} - i}{e^{it} + i}, \text{ dacă } t \in [0, \pi) \text{ și } \psi(e^{it}) = 1, \text{ dacă } t \in [\pi, 2\pi).$$

Atunci imaginea funcției ψ este:

$$\psi(\mathcal{S}^1) = \{1\} \cup \{it; t \in [-1, 1)\},$$

și deci imaginea esențială a lui ψ este (cf. exemplului 9(vi), cap.4):

$$\overline{\psi(\mathcal{S}^1)} = \{1\} \cup \{it; t \in [-1, 1]\} = \sigma(M_\psi).$$

În particular, operatorul M_ψ nu este inversabil.

Tot în legătură cu acest exemplu, se observă ușor că $\lambda = 1$ este va-

loare proprie a operatorului M_ψ . Într-adevăr, orice funcție neidentic nulă $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ care se anulează pe submulțimea $\{e^{it}; t \in [0, \pi]\}$, verifică egalitatea $M_\psi f = \psi f = f$, deci este vector propriu (asociat valorii proprii 1) al operatorului M_ψ .

În general, se poate demonstra că λ este valoare proprie pentru operatorul M_ϕ dacă și numai dacă mulțimea pe care funcția ϕ ia valoarea λ are măsură nenulă ([10], p.40).

35. Observație

Așa cum am menționat, rezultatele demonstrate mai sus sunt adevărate și în cazul general al unui operator de multiplicare

$M_\psi : L^2(\Omega, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mu)$, cu funcția $\psi \in L^\infty(\Omega, \mu)$, iar spațiul cu măsură (Ω, μ) este σ -finit. Propunem cititorului să adapteze în mod corespunzător demonstrațiile.

Să considerăm acum câteva exemple pe R . Fie deci $\Omega = R$, măsura μ măsura Lebesgue (pe R) și fie

$$\phi(x) = \frac{1 + 2x^2}{1 + x^2}, \forall x \in R.$$

Atunci $\phi \in L^\infty(R)$ și $\phi(R) = [1, 2]$. Rezultă deci că $\sigma(M_\phi) = [1, 2]$; în particular, operatorul M_ϕ este pozitiv și inversabil.

Vom da acum un exemplu de operator de multiplicare unitar pe $L^2(R)$; fie $\psi(x) = \frac{x+i}{ix+1}$, $\forall x \in R$. Atunci $\sigma(M_\psi) = \mathcal{S}^1$, deci M_ψ este unitar.

Pentru a obține proiectori, trebuie ca multiplicatorul ψ să fie funcția caracteristică a unei mulțimi măsurabile. De exemplu, pentru orice $\tau \in R$ (fixat) fie χ_τ funcția caracteristică a intervalului $(-\infty, \tau]$. Atunci operatorul de multiplicare cu χ_τ este proiectorul pe subspațiul (din $L^2(R)$) al funcțiilor care se anulează pe intervalul (τ, ∞) ; el se numește operatorul de trunchiere la momentul τ , iar o notație uzuală este P_τ . Evident, $\sigma(P_\tau) = \sigma_p(P_\tau) = \{0, 1\}$.

36. Observație

Operatorii de multiplicare au și alte proprietăți remarcabile. De exemplu, mulțimea operatorilor de multiplicare, $\mathcal{M} = \{M_\phi; \phi \in L^\infty(\Omega, \mu)\}$ este o C^* -algebră comutativă, iar aplicația $L^\infty(\Omega, \mu) \ni \phi \rightarrow M_\phi \in \mathcal{M}$ este un izomorfism de C^* -algebre. Mai mult, algebra \mathcal{M} este maximal abeliană; aceasta înseamnă că un operator care comută cu toți operatorii de multiplicare este el însuși un operator de multiplicare. Această proprietate permite o altă demonstrație pentru spectrul lui M_ϕ ; [5], p.89.

37. Propoziție

Fie (H, \langle, \rangle_H) și (K, \langle, \rangle_K) două spații Hilbert și fie $T \in \mathcal{L}(H)$ și $S \in \mathcal{L}(K)$. Operatorii T și S se numesc **unitar-echivalenți** dacă există un izomorfism de spații Hilbert (a se vedea definiția 7, cap.1) $U : H \rightarrow K$ astfel încât

$$T = U^{-1}SU.$$

De exemplu, în capitolul 2 (teorema 28), am demonstrat că un operator normal pe C^n este unitar-echivalent cu un operator diagonal.

Doi operatori unitar-echivalenți au același spectru, aceeași normă, aceleași valori proprii, același spectru punctual aproximativ.

De asemenea, dacă S este inversabil, atunci:

$$T^* = U^{-1}S^*U \text{ și } T^{-1} = U^{-1}S^{-1}U.$$

Demonstrație Reamintim că prin izomorfism de spații Hilbert (sau operator unitar) se înțelege un operator liniar bijectiv cu proprietatea $\langle Ux, Uy \rangle_K = \langle x, y \rangle_H, \forall x, y \in H$. Să demonstrăm de exemplu egalitatea $\sigma(S) = \sigma(T)$; dacă $\lambda \in C$, atunci $\lambda I - S$ este inversabil $\Leftrightarrow U^{-1}(\lambda I - S)U$ este inversabil $\Leftrightarrow \lambda I - U^{-1}SU$ este inversabil.

Pentru a demonstra egalitatea $T^* = U^{-1}S^*U$, trebuie să definim adjunctul unui operator oarecare, $A : H \rightarrow K$; procedându-se în mod analog cazului $H = K$ (propoziția 1 din acest capitol) se demonstrează existența unui operator

$$A^* : K \rightarrow H, \text{ astfel încât } \langle Au, v \rangle_K = \langle u, A^*v \rangle_H \quad \forall u \in H \text{ și } v \in K.$$

Un alt mod de a demonstra existența lui A^* este de a particulariza definiția adjunctului unui operator între două spații normate (a se vedea teorema 29, cap.3) pentru spații Hilbert (se folosește teorema lui Riesz: teorema 13, cap.1). Proprietățile lui A^* sunt practic identice cu cele din cazul $H = K$; de exemplu, dacă $A = U$ este unitar, atunci $U^* = U^{-1}$. Rezultă deci $T^* = (U^{-1}SU)^* = U^{-1}S^*U$. În mod analog se demonstrează celelalte proprietăți.

O clasă de operatori care sunt unitar echivalenți cu operatorii de multiplicare pe $L^2(\mathcal{S}^1)$ sunt **operatorii de convoluție** pe spațiul $\ell^2(Z)$.

Reamintim că dacă α și β sunt două șiruri definite pe Z , atunci convoluția lor este șirul notat $\alpha \star \beta$ definit prin:

$$(\alpha \star \beta)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(k)\beta(n-k),$$

în ipoteza că seria converge pentru orice $n \in Z$ fixat. Produsul de convoluție este comutativ, asociativ, distributiv față de adunare și are element neutru

șirul $\sigma_o(n) = 1$ dacă $n = 0$ și 0 în rest; a se vedea exemplul 2(vi), cap.4.

38. Definiție (operatorul de convoluție pe Z)

Fie un șir $\theta \in \ell^2(Z)$ astfel încât:

(i) $\theta \star x \in \ell^2(Z)$, $\forall x \in \ell^2(Z)$.

Cu această condiție îndeplinită, putem defini **operatorul de convoluție** cu θ prin relația:

$$C_\theta : \ell^2(Z) \rightarrow \ell^2(Z), C_\theta x = \theta \star x.$$

Menționăm că restricția $\theta \in \ell^2(Z)$ este necesară pentru existența transformatei Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}\theta$.

Liniaritatea operatorului C_θ este evidentă; continuitatea și o explicare a condiției (i) urmează a fi studiate în continuare.

Pentru aceasta, vom demonstra că operatorul de convoluție este unitar echivalent cu un operator de multiplicare.

În definiția 21, cap.1 am văzut că transformarea Fourier:

$$\mathcal{F} : L^2(\mathcal{S}^1) \rightarrow \ell^2(Z), \mathcal{F}f = \hat{f},$$

unde $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int} dt$, este un izomorfism de spații Hilbert. Inversa ei este definită prin:

$$\mathcal{F}^{-1}x = \sum_{n \in Z} x(n)\omega_n,$$

unde, am notat $\omega_n(e^{it}) = e^{int}$, (ca în definiția 18, cap.1).

Reamintim de asemenea că restricția lui \mathcal{F}^{-1} la $\ell^1(Z)$ admite o formulă punctuală (a se vedea teorema 22, cap.1):

$$(\mathcal{F}^{-1}\alpha)(e^{it}) = \sum_{n \in Z} \alpha(n)e^{int}, \forall \alpha \in \ell^1(Z).$$

39. Lemă

Pentru orice $\alpha, \beta \in \ell^1(Z)$, are loc egalitatea:

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta) = (\mathcal{F}^{-1}\alpha)(\mathcal{F}^{-1}\beta).$$

Demonstrație Deoarece α și β sunt în $\ell^1(Z)$, convoluția $\alpha \star \beta$ există și aparține de asemenea spațiului $\ell^1(Z)$ (cf. exemplului 2(vi), cap.4).

Pentru orice $e^{it} \in \mathcal{S}^1$, avem:

$$[\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta)](e^{it}) = \sum_{n \in Z} (\alpha \star \beta)(n)e^{int} = \sum_{n \in Z} \sum_{k \in Z} \alpha(k)\beta(n-k)e^{int} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in Z} [\alpha(k) \sum_{m \in Z} \beta(m) e^{i(k+m)t}] = \left(\sum_{k \in Z} \alpha(k) e^{ikt} \right) \left(\sum_{m \in Z} \beta(m) e^{imt} \right) = \\
&= [(\mathcal{F}^{-1}\alpha)(\mathcal{F}^{-1}\beta)](e^{it}),
\end{aligned}$$

schimbarea ordinea de sumare fiind posibilă deoarece seriile sunt absolut convergente.

40. Teoremă

(a) Fie $\theta \in \ell^2(Z)$; atunci: $(\mathcal{F}^{-1}C_\theta\mathcal{F})f = (\mathcal{F}^{-1}\theta)f, \forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$.

(b) Operatorul de convoluție cu θ este corect definit (în sensul că îndeplinește condiția (i) din definiția 38) dacă și numai dacă

$$\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1);$$

în acest caz, C_θ este operator continuu și este unitar echivalent cu operatorul de multiplicare cu $\mathcal{F}^{-1}\theta$, adică $\mathcal{F}^{-1}C_\theta\mathcal{F} = M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}$.

$$\begin{array}{ccc}
\ell^2(Z) & \xrightarrow{C_\theta} & \ell^2(Z) \\
\mathcal{F}^{-1} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}^{-1} \\
L^2(\mathcal{S}^1) & \xrightarrow{M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}} & L^2(\mathcal{S}^1)
\end{array}$$

(c) Reciproc, fiind dat un operator de multiplicare M_ϕ pe $L^2(\mathcal{S}^1)$, (deci $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$), există un operator de convoluție pe $\ell^2(Z)$, și anume $C_{\hat{\phi}}$ astfel $M_\phi = \mathcal{F}^{-1}C_{\hat{\phi}}\mathcal{F}$.

Demonstrație (a) Vom demonstra egalitatea de la punctul (a) pentru funcțiile $\omega_n(e^{it}) = e^{int}, \forall n \in Z$ în ipoteza suplimentară $\theta \in \ell^1(Z)$.

Pentru aceasta, calculăm mai întâi $\mathcal{F}\omega_n$:

$$(\mathcal{F}\omega_n)(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \sigma_n(m), \forall m \in Z,$$

unde, reamintim,

$$\sigma_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } m = n \\ 0 & \text{dacă } m \neq n \end{cases}$$

Să mai observăm că $\sigma_n \in \ell^1(Z)$ și deci (cf. teoremei 22, cap.1):

$$(\mathcal{F}^{-1}\sigma_n)(e^{it}) = e^{int}, \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1.$$

Fie $\theta \in \ell^1(Z)$; atunci, în baza lemei anterioare, avem:

$$\mathcal{F}^{-1}C_\theta\mathcal{F}\omega_n = \mathcal{F}^{-1}(\theta \star \sigma_n) = (\mathcal{F}^{-1}\theta)\omega_n, \forall n \in Z.$$

Deoarece subspațiul liniar generat de funcțiile $\{\omega_n\}_{n \in Z}$ este dens în $L^2(\mathcal{S}^1)$, egalitatea (a) este adevărată pentru orice $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ pentru că \mathcal{F} și \mathcal{F}^{-1} , sunt aplicații continue (în norma $\|\cdot\|_2$).

Acum, egalitatea (a) rezultă și pentru $\theta \in \ell^2(Z)$, deoarece $\ell^1(Z)$ este dens în $\ell^2(Z)$, (a se vedea exemplul 4(iv), cap.1).

(b) Totul rezultă acum din proprietățile operatorului de multiplicare cu $\mathcal{F}^{-1}\theta$; am demonstrat (în lema 32) că acesta (și deci și C_θ) este corect definit (și în acest caz și continuu) dacă și numai dacă funcția multiplicator $\mathcal{F}^{-1}\theta$ este esențial mărginită pe \mathcal{S}^1 .

(c) Fie $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$; atunci, pentru orice $n \in Z$, avem:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(e^{it})e^{-int}| dt \leq \|\phi\|_\infty < \infty,$$

și deci funcția ϕ are transformată Fourier:

$$\hat{\phi} : Z \rightarrow C, \hat{\phi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{it})e^{-int} dt.$$

Faptul că operatorul $C_{\hat{\phi}}$ este corect definit și este unitar echivalent cu M_ϕ rezultă din (a) și (b).

Să observăm că demonstrația punctului (c) s-a bazat în mod esențial pe faptul că măsura (Lebesgue) a cercului unitate este finită, ceea ce implică faptul că o funcție din $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ are transformată Fourier (coeficienți Fourier), deoarece $L^\infty(\mathcal{S}^1) \subset L^2(\mathcal{S}^1)$.

41. Corolar (proprietățile operatorului de convoluție pe Z)

Fie $\theta : Z \rightarrow C$ astfel încât $\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ și fie C_θ operatorul de convoluție asociat; atunci, din teorema de mai sus și din proprietățile operatorilor de multiplicare demonstrate anterior, avem:

(a) $\|C_\theta\| = \|M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}\| = \|\mathcal{F}^{-1}\theta\|_\infty$.

(b) $\sigma(C_\theta) = \sigma(M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}) = \text{essran}(\mathcal{F}^{-1}\theta)$.

(c) Dacă șirul $\theta \in \ell^1(Z)$, atunci funcția $\mathcal{F}^{-1}\theta$ este continuă pe \mathcal{S}^1 , deci (deoarece \mathcal{S}^1 este compact) ea este și mărginită și spectrul lui C_θ este imaginea funcției $\mathcal{F}^{-1}\theta$:

$$\sigma(C_\theta) = (\mathcal{F}^{-1}\theta)(\mathcal{S}^1).$$

În particular, în acest caz, C_θ este operator inversabil dacă și numai dacă $\mathcal{F}^{-1}\theta$ nu se anulează pe \mathcal{S}^1 .

(d) Dacă C_θ este operator inversabil, atunci inversul său este operatorul de convoluție cu $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}\right)$, adică

$$C_\theta^{-1}x = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}\right) \star x, \forall x \in \ell^2(Z).$$

Pentru demonstrația punctului (d), trebuie arătată mai întâi egalitatea:

$$\widehat{fg} = \widehat{f} \star \widehat{g}, \forall f, g \in L^2(\mathcal{S}^1).$$

Lăsăm detaliile ca exercițiu.

42.Exemplu

(i) Operatorul de translație bilateral W (din definiția 23) este un operator de convoluție; într-adevăr, $W = C_{\sigma_1}$.

Mai general, W^n este operatorul de convoluție cu șirul σ_n , pentru orice $n \in Z$.

Deoarece $(\mathcal{F}^{-1}\sigma_n)(e^{it}) = \omega_n(e^{it}) = e^{int}$, rezultă că W^n este unitar-echivalent cu M_{ω_n} :

$$\mathcal{F}^{-1}W^n\mathcal{F} = M_{\omega_n}.$$

În particular, $(\mathcal{F}^{-1}W\mathcal{F}f)(e^{it}) = e^{it}f(e^{it})$.

(ii) Fie operatorul

$$T : \ell^2(Z) \rightarrow \ell^2(Z), (Tx)(n) = x(n+1) - 4x(n-1), \forall n \in Z.$$

Vom demonstra că T este inversabil și vom calcula inversul său; fie:

$$\theta : Z \rightarrow C, \theta(-1) = 1, \theta(1) = -4 \text{ și } \theta(n) = 0 \text{ în rest.}$$

Atunci evident $T = C_\theta$ și vom aplica rezultatele precedente; avem:

$$(\mathcal{F}^{-1}\theta)(e^{it}) = e^{it} - 4e^{-it} = \frac{e^{2it} - 4}{e^{it}},$$

și deci C_θ este operator inversabil deoarece $\mathcal{F}^{-1}\theta$ nu se anulează pe cercul unitate.

Inversul operatorului $\mathcal{F}^{-1}C_\theta\mathcal{F} = M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}$, este operatorul de multiplicare cu funcția

$$\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}(e^{it}) = \frac{e^{it}}{e^{2it} - 4}.$$

Rezultă deci că:

$$(C_\theta)^{-1}x = \left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}\right)\right) \star x, \forall x \in \ell^2(Z).$$

Calculăm transformata Fourier a funcției $\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}$:

$$\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}\right)\right)(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{2it} - 4} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{z^{-n}}{z^2 - 4} dz.$$

Calculând ultima integrală cu teorema reziduurilor, obținem:

$$\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}\right)\right)(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \leq 0 \\ 0, & \text{dacă } n > 0 \text{ și } n \text{ par} \\ -\frac{1}{2^{n-1}}, & \text{dacă } n > 0 \text{ și } n \text{ impar} \end{cases}$$

Rezultă deci:

$$((C_\theta)^{-1}x)(n) = \sum_{k \geq 0} -\frac{1}{2^{2k}} x(n - 2k - 1).$$

În continuare prezentăm **operatorul de convoluție** pe R ; rezultatele sunt similare celor din cazul Z , cu excepția punctului (c) din teorema 40. Demonstrațiile vor fi omise, principalele referiri bibliografice sunt [17],p.49; [13],p.192; [6],p.949.

43. Definiție (operatorul de convoluție pe R)

Fie $L^1(R)$ spațiul Banach al funcțiilor integrabile (a se vedea exemplul 4(iv),cap.1 și 2(vii),cap.4) și fie $k \in L^1(R)$. Atunci, pentru orice funcție $f \in L^2(R)$, convoluția $(k \star f)(x) = \int_R k(x-y)f(y)dy$ definește o funcție din $L^2(R)$ și în plus $\|k \star f\|_2 \leq \|k\|_1 \|f\|_2$; pentru demonstrație, recomandăm [6],p.951.

Rezultă deci că **operatorul de convoluție** cu funcția $k \in L^1(R)$ este corect definit pe spațiul $L^2(R)$:

$$C_k : L^2(R) \rightarrow L^2(R), C_k f = k \star f.$$

44. Observație

Reamintim câteva proprietăți ale **transformatei Fourier pe R** ; ca bibliografie recomandăm [1],p.482; [17],p.76; [13],p.192; [15],p.6.

Pentru orice funcție $k \in L^1(R)$, transformata sa Fourier este, prin definiție

$$(\mathcal{F}k)(x) = \widehat{k}(x) = \int_R k(y)e^{-ixy} dy, \forall x \in R.$$

Funcția \widehat{k} este continuă și mărginită pe R și $\|\widehat{k}\|_\infty \leq \|k\|_1$. Menționăm că există funcții continue și mărginite pe R care nu sunt transformate Fourier

ale unor funcții din $L^1(R)$.

Restricția aplicației \mathcal{F} la subspațiul $K = L^1(R) \cap L^2(R)$ ia valori în $L^2(R)$ și deci, deoarece K este dens în $L^2(R)$, (cf. exemplului 4(iv), cap.1), ea se poate prelunge prin continuitate (în norma $\|\cdot\|_2$) la întregul $L^2(R)$; se obține astfel transformarea Fourier (sau Fourier-Plancherel):

$$\mathcal{F} : L^2(R) \rightarrow L^2(R),$$

cu proprietățile:

(a) \mathcal{F} este un izomorfism de spații Hilbert; acest rezultat este cunoscut sub numele de **teorema lui Plancherel**.

(b) $\mathcal{F}(k \star f) = \widehat{k}\widehat{f}$.

Pentru demonstrația teoremei lui Plancherel, recomandăm: [13], p.187; [15], p.26.

45. Teoremă (proprietățile operatorului de convoluție pe R)

Fie $k \in L^1(R)$, fie C_k operatorul de convoluție cu k , \mathcal{F} transformarea Fourier și $M_{\widehat{k}}$ operatorul de multiplicare cu \widehat{k} ; atunci:

(a) $C_k = \mathcal{F}^{-1}M_{\widehat{k}}\mathcal{F}$.

(b) $\|C_k\| = \|M_{\widehat{k}}\| = \|\widehat{k}\|_\infty$.

(c) $\sigma(C_k) = \sigma(M_{\widehat{k}}) = \widehat{k}(R)$.

Demonstrație Toate afirmațiile rezultă din lema și observația anterioare și din proprietățile corespunzătoare ale operatorului de multiplicare (a se vedea propoziția 27 și teorema 33).

46. Observație

Așa cum am văzut, există asemănări importante între operatorii de convoluție pe $\ell^2(Z)$ și cei de pe $L^2(R)$. Metoda de studiu este aceeași: sunt unitar-echivalenți (prin transformarea Fourier) cu operatori de multiplicare pe $L^2(\mathcal{S}^1)$ și respectiv pe $L^2(R)$. În teoria sistemelor, spațiul pe care este definit operatorul de convoluție se numește domeniul timp, iar spațiul pe care este definit operatorul de multiplicare corespunzător se numește domeniul frecvență; unitar-echivalența celor doi operatori prin transformarea Fourier este denumită dualitatea timp-frecvență. Menționăm totuși o deosebire remarcabilă între cele două cazuri. Deoarece orice funcție din $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ are transformată Fourier, rezultă că orice operator de multiplicare pe $L^2(\mathcal{S}^1)$ este unitar echivalent cu un operator de convoluție pe $\ell^2(Z)$ (cf. teoremei 40(c)). În schimb, există funcții $\phi \in L^\infty(R)$ care nu au transformată Fourier: integrala $\int_R \phi(t)e^{-itx} dt$ nu converge (măsura Lebesgue a lui R este ∞). Concluzie: pentru un astfel de ϕ , operatorul de multiplicare M_ϕ este corect definit pe $L^2(R)$, dar nu există un operator de convoluție pe $L^2(R)$ unitar-echivalent

cu M_ϕ prin transformarea Fourier.

Dacă $M_T = (a_{ij}), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ este matricea unui operator T pe spațiul C^n , atunci $(Tx)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n$. Un analog infinit dimensional al acestei definiții este **operatorul integral**.

46. Definiție (operatorul integral)

Să considerăm spațiul Hilbert $(L^2(0, 1), \|\cdot\|_2)$ al funcțiilor de pătrat integrabil pe intervalul $[0, 1]$ în raport cu măsura Lebesgue; (cf. exemplului 17(iii), cap. 1). Fie $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C$ o funcție de pătrat integrabil pe $[0, 1] \times [0, 1]$ și fie:

$$\|K\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dx dy}.$$

Demonstrăm acum că pentru orice funcție $f \in L^2(0, 1)$, funcția g definită prin egalitatea:

$$g(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$$

este în $L^2(0, 1)$; avem (folosim inegalitatea lui Schwarz):

$$\begin{aligned} \|g\|_2^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x, y)f(y)dy \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)|^2 dy \right) \left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy \right) dx = \|f\|_2^2 \|K\|_2^2. \end{aligned}$$

Rezultă deci că putem defini aplicația:

$$T_K : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), (T_K f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy.$$

Operatorul T_K se numește **operatorul integral** definit de **nucleul** K . Din calculul de mai sus rezultă că T_K este continuu și $\|T_K\| \leq \|K\|_2$.

47. Propoziție (proprietățile operatorului integral)

Fie T_K și T_H doi operatori integrali cu nucleele K și respectiv H .

(a) Pentru orice $\alpha, \beta \in C$, operatorul $\alpha T_K + \beta T_H$ este operator integral și are nucleul $\alpha K + \beta H$.

(b) Operatorul $T_K T_H$ este operator integral și are nucleul definit prin $G(x, y) = \int_0^1 K(x, z)H(z, y)dz$, deci:

$$(T_K T_H f)(x) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, z)H(z, y)dz \right) f(y)dy.$$

În cazul particular $K = H$, obținem:

$$(T_K^2 f)(x) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, z) K(z, y) dz \right) dx.$$

(c) Dacă șirul de nuclee K_n converge în spațiul Hilbert $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ la funcția K , atunci șirul de operatori integrali T_{K_n} converge în spațiul $(\mathcal{L}(L^2(0, 1)), \|\cdot\|)$ la operatorul integral T_K .

(d) Adjunctul operatorului T_K este operatorul integral $T_{\tilde{K}}$, cu nucleul $\tilde{K}(x, y) = \overline{K(y, x)}$; în particular, T_K este autoadjunct dacă și numai dacă nucleul K are proprietatea $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ (un astfel de nucleu se numește simetric).

Demonstrație (a) este evident.

(b) Pentru orice $f \in L^2(0, 1)$, avem:

$$\begin{aligned} (T_K T_H f)(x) &= \int_0^1 K(x, y) (T_H f)(y) dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) H(y, z) f(z) dz dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, y) H(y, z) dy \right) f(z) dz = \\ &= \int_0^1 G(x, z) f(z) dz = (T_G f)(x). \end{aligned}$$

(c) Demonstrația este o consecință imediată a inegalității dintre normele operatorului integral și a nucleului său:

$$\|T_{K_n} - T_K\| \leq \|K_n - K\|_{2 \rightarrow 0}.$$

(d) Pentru orice $f, g \in L^2(0, 1)$, avem:

$$\begin{aligned} \langle T_K f, g \rangle &= \int_0^1 (T_K f)(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 \left(f(y) \int_0^1 K(x, y) \overline{g(x)} dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 f(y) \overline{\left(\int_0^1 \tilde{K}(y, x) g(x) dx \right)} dy = \langle f, T_{\tilde{K}} g \rangle. \end{aligned}$$

Proprietățile de mai sunt adevărate și în cazul în care intervalul $[0, 1]$ (cu măsura Lebesgue) este înlocuit de un spațiu cu măsură σ -finită. În particular, putem considera operatori integrali pe Z și R .

Operatorii de convoluție sunt atunci cazuri particulare de operatori integrali, considerând nuclee de forma $K(n, m) = \theta(n - m)$, $\forall n, m \in Z$ și respectiv $K(x - y) = k(x - y)$, $\forall x, y \in R$.

Un alt caz particular remarcabil de operator integral este **operatorul Volterra**,

pe care-l vom studia în continuare.

48. Definiție (operatorul Volterra)

Un nucleu $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ se numește **nucleu de tip Volterra** dacă are proprietatea $K(x, y) = 0, \forall x < y$. Rezultă deci că operatorul integral asociat unui astfel de nucleu (numit **operator Volterra**) este definit prin:

$$(T_K f)(x) = \int_0^x K(x, y) f(y) dy, \forall f \in L^2(0, 1).$$

Analogia cu teoria matricelor este evidentă: operatorii de tip Volterra sunt analogul operatorilor asociați matricelor inferior triunghiulare. Se știe că dacă o matrice A este strict inferior triunghiulară, atunci ea este nilpotentă, adică există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^m = O$. Vom demonstra în continuare o proprietate asemănătoare și pentru operatorii Volterra definiți de nucleu mărginite; o consecință va fi calculul spectrului unui astfel de operator.

49. Teoremă

Fie $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ un nucleu de tip Volterra mărginit, deci $\|K\|_\infty < \infty$; atunci, operatorul Volterra asociat, T_K are proprietățile:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|T_K^n\|)^{\frac{1}{n}} = 0$.

(b) $\sigma(T_K) = \{0\}$; un operator cu această proprietate se numește **cvasinilpotent**.

Demonstrație Vom demonstra mai întâi că produsul a doi operatori de tip Volterra T_K și T_H este un operator de același tip. Ținând cont de cele demonstrate în propoziția 47(b), este suficient să arătăm implicația:

$$K(x, y) = H(x, y) = 0, \forall x < y \Rightarrow G(x, y) = 0, \forall x < y,$$

unde, $G(x, y) = \int_0^1 K(x, z) H(z, y) dz$.

Într-adevăr, dacă $x < y$, atunci orice $z \in [0, 1]$ trebuie să verifice cel puțin una din inegalitățile: $x < z$ sau $z < y$; în primul caz, avem $K(x, z) = 0$, iar în al doilea $H(z, y) = 0$, deci oricum $G(x, y) = 0$. Dacă $x \geq y$, atunci:

$$G(x, y) = \int_y^x K(x, z) H(z, y) dz.$$

Să presupunem acum că $H = K$ și să notăm în acest caz

$$K^{[2]}(x, y) = G(x, y) = \int_0^1 K(x, z) K(z, y) dz,$$

și în general pentru $n \in \mathbb{N}$:

$$K^{[n]}(x, y) = \int_0^1 K(x, z) K^{[n-1]}(z, y) dz.$$

Pentru orice $0 \leq y \leq x \leq 1$, avem:

$$|K^{[2]}(x, y)| = \left| \int_y^x K(x, z)K(z, y)dz \right| \leq \|K\|_\infty^2 (x - y).$$

Prin inducție rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $y \leq x$, avem:

$$|K^{[n]}(x, y)| \leq \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} (x-y)^{n-1} \leq \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!}.$$

Rezultă deci că:

$$\left(\|T_K^n\|\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\|K^{[n]}\|_\infty\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\|K\|_\infty}{(n-1)!^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 0,$$

pentru $n \longrightarrow \infty$, ceea ce încheie demonstrația.

(b) Reamintim că raza spectrală a unui operator T este, (cf. definiției 12, cap.4), $r(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}$; am demonstrat de asemenea (teorema 13, cap.4) formula razei spectrale: $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Din definiția razei spectrale rezultă în mod evident că dacă $r(T) = 0$, atunci $\sigma(T) = \{0\}$. Din cele demonstrate la punctul **(a)**, rezultă că $r(T_K) = 0$, deci $\sigma(T_K) = \{0\}$. Mai facem observația că afirmațiile din teoremă sunt adevărate și fără ipoteză de mărginire a nucleului; demonstrația este însă considerabil mai dificilă ([10], p.93).

Un caz particular interesant de operator Volterra se obține considerând nucleul $V(x, y) = 1$, dacă $y \leq x$, și 0 în rest. Operatorul asociat (numit și **operatorul Volterra integral**) este:

$$(T_V f)(x) = \int_0^x f(y)dy, \forall f \in L^2(0, 1).$$

Norma lui T_V este $\|T_V\| = \frac{1}{2\pi}$; (pentru demonstrație: [10], p.300).

5.4 Operatori normali

50. Introducere

Reamintim că un operator $T \in \mathcal{L}(H)$ se numește normal dacă verifică egalitatea $TT^* = T^*T$; în paragraful precedent am studiat o clasă importantă de operatori normali: operatorii de multiplicare.

În capitolul 2 (teorema 28) am văzut că principalul rezultat referitor la structura operatorilor din $\mathcal{L}(C^n)$ este:

Teorema spectrală pentru operatori normali pe C^n

Un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este diagonalizabil în sens geometric dacă și numai dacă T este operator normal.

Generalizarea acestui rezultat la spații Hilbert infinit dimensionale este o problemă fundamentală a teoriei operatorilor; ea și câteva consecințe ale sale constituie subiectul acestui paragraf.

În prezentarea care urmează, analogia cu cazul finit dimensional este interesantă: trebuie remarcat ce rezultate finit dimensionale au un corespondent (asemănător) infinit dimensional și ce anume se schimbă în totalitate.

Să revenim acum la enunțul teoremei spectrale pentru operatori normali pe spații finit dimensionale. Operator diagonalizabil (în sens geometric) înseamnă, în acel caz, un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ pentru care există o bază \mathcal{B} ortonormală (a lui C^n) formată din vectori proprii ai operatorului T , sau, echivalent, există un operator unitar U astfel încât $U^{-1}TU$ să fie operator diagonal; în această situație matricea lui T în baza \mathcal{B} are formă diagonală, (pe diagonală fiind valorile proprii ale lui T), iar coloanele matricei lui U sunt vectorii din \mathcal{B} . În cazul infinit dimensional, noțiunile de valoare proprie și vector propriu nu mai constituie instrumente la fel de puternice ca în cazul finit dimensional; am dat exemple în paragraful precedent de operatori (chiar normali) care nu au valori proprii. Deci o "formă diagonală" pentru operatori normali pe spații Hilbert infinit dimensionale este puțin probabilă (aceasta nu exclude posibilitatea unei "forme diagonale" pentru clase mai restrânse de operatori).

Vom reformula acum noțiunea de operator diagonal pe C^n .

Fie $D \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator diagonal, deci matricea sa în baza canonică este:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix},$$

iar $(Dx)_k = \lambda_k x_k, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n$.

Să considerăm spațiul C^n ca fiind mulțimea tuturor funcțiilor

$$x : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow C, \quad x(k) = x_k,$$

vectorul $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ identificându-se cu valorile funcției x de mai sus.

Să considerăm funcția

$$\phi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow C, \quad \phi(k) = \lambda_k.$$

Atunci operatorul D poate fi identificat cu operatorul de multiplicare cu ϕ :

$$(Dx)(k) = \phi(k)x(k) = (M_\phi x)(k), \forall x \in C^n \text{ și } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Spațiul cu măsură (Ω, μ) din definiția generală a operatorilor de multiplicare (definiția 25 din paragraful precedent) este $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ iar măsura μ este măsura de numărare.

Cu aceste precizări, enunțul teoremei spectrale pentru operatori normali pe spații finit dimensionale, devine:

Teoremă

Un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este unitar-echivalent cu un operator de multiplicare M_ϕ dacă și numai dacă T este operator normal.

Această formulare (în care **operator diagonalizabil în sens geometric** înseamnă **operator unitar-echivalent cu un operator de multiplicare**) are un analog infinit dimensional.

Reamintim că în paragraful precedent am definit și studiat operatorii de multiplicare: dacă (Ω, μ) este un spațiu cu măsură și dacă $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$, atunci operatorul de multiplicare cu funcția ϕ este:

$$M_\phi : L^2(\Omega, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mu), (M_\phi f)(t) = \phi(t)f(t), \forall t \in \Omega.$$

Am demonstrat (este de altfel evident) că operatorii de multiplicare sunt normali; reciproca acestei afirmații ("modulo unitar-echivalență") este varianta infinit dimensională a teoremei spectrale pentru operatori normali (din cazul finit dimensional).

51. Teorema spectrală pentru operatori normali pe spații Hilbert infinit dimensionale

Fie H un spațiu Hilbert infinit dimensional (separabil) și fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator normal.

Atunci există un spațiu cu măsură boreliană regulată finită (Ω, μ) , un izomorfism de spații Hilbert (operator unitar) $U : H \rightarrow L^2(\Omega, \mu)$ și o funcție $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ astfel încât $T = U^{-1}M_\phi U$.

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{T} & H \\
 \downarrow U & & \downarrow U \\
 L^2(\Omega, \mu) & \xrightarrow{M_\phi} & L^2(\Omega, \mu)
 \end{array}$$

Într-o formulare concisă, teorema afirmă că **un operator este normal dacă și numai dacă este unitar-echivalent cu un operator de multiplicare**. Pentru alte formulări (echivalente) ale acestui rezultat cât și pentru demonstrație, recomandăm [10],p.61; [6],p.911; [5],p.93; [20],p.71.

Un caz particular studiat deja al acestui rezultat este unitar-echivalența dintre operatorii de convoluție (care sunt normali) și cei de multiplicare; a se vedea teoremele 40 și 45.

Consecințele imediate (dar remarcabile) ale acestei teoreme sunt proprietățile operatorilor normali deduse din proprietățile corespunzătoare ale operatorilor de multiplicare; avem deci (a se vedea propoziția 27, observația 28, teorema 33 și propoziția 37 din paragraful precedent):

52. Teoremă (proprietățile operatorilor normali)

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator normal; atunci:

- (a) $\sigma(T^*) = \sigma(T) = \{\bar{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\}$.
- (b) T este autoadjunct $\Leftrightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.
- (c) T este pozitiv $\Leftrightarrow \sigma(T) \subset [0, \infty)$.
- (d) T este unitar $\Leftrightarrow \sigma(T) \subseteq \mathcal{S}^1$.
- (e) T este proiector $\Leftrightarrow \sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$.
- (f) $r(T) = \|T\|$.
- (g) $\|Tx\| = \|T^*x\|, \forall x \in H$; se poate demonstra că această proprietate caracterizează operatorii normali.

Este interesant acum să ne reamintim analogia dintre numere complexe și operatori de la sfârșitul paragrafului 1 (acest capitol). Este clar (din teorema de mai sus) că analogia este mai naturală dacă înlocuim în tabelul respectiv "operator" cu "operator normal".

În general, dacă T nu este un operator normal, proprietățile de mai sus nu sunt adevărate. De exemplu, operatorul integral Volterra T_V de la sfârșitul paragrafului precedent (teorema 49) are spectrul format numai din numărul 0, dar nu este autoadjunct; în schimb, dacă un operator normal are spectrul

$\{0\}$, atunci, din proprietatea (f) de mai sus rezultă că el este operatorul identic nul.

Ca și în cazul finit dimensional, (a se vedea definiția 36, cap2), o consecință importantă a teoremei spectrale este posibilitatea construirii unui ”**calcul funcțional**” pentru operatori normali. Prezentăm în continuare această construcție.

53. Definiție

Dacă $T \in \mathcal{L}(H)$ este un operator arbitrar (fixat) și $p \in C[X]$ este un polinom , $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ atunci, este natural să definim operatorul $p(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k$. Am construit în felul acesta o aplicație (numită ”**calculul funcțional polinomial al operatorului T** ”):

$$C[X] \ni p \rightarrow p(T) \in \mathcal{L}(H),$$

cu proprietățile:

$$(\alpha p + \beta q)(T) = \alpha p(T) + \beta q(T) \text{ (liniară) și}$$

$$(pq)(T) = p(T)q(T) \text{ (multiplicativă),}$$

pentru orice $\alpha, \beta \in C$ și $p, q \in C[X]$; demonstrațiile sunt imediate.

Din ultima egalitate rezultă că operatorii $p(T)$ și $q(T)$ comută.

Tot cu metode elementare, și tot pentru un operator arbitrar, putem defini $f(T)$ și pentru anumite funcții raționale.

Pentru aceasta, fie $\lambda \notin \sigma(T)$ și fie funcția (rațională) $g(z) = \frac{1}{\lambda - z}$; o definiție naturală pentru operatorul $g(T)$ este $g(T) = (\lambda I - T)^{-1}$. Să observăm că definiția este corectă deoarece operatorul $\lambda I - T$ este inversabil (λ nefiind în spectrul lui T). Să mai observăm că doi operatori de forma $(\lambda I - T)^{-1}$ și $(\nu I - T)^{-1}$ comută între ei deoarece operatorii $\lambda I - T$ și $\nu I - T$ comută. Mai general, fie $q(z) = \alpha(\lambda_1 - z)(\lambda_2 - z)\dots(\lambda_n - z)$; observăm că putem defini operatorul:

$$\frac{1}{q}(T) = \frac{1}{\alpha}(\lambda_1 I - T)^{-1}(\lambda_2 I - T)^{-1}\dots(\lambda_n I - T)^{-1},$$

dacă și numai dacă $\lambda_k \notin \sigma(T)$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Este evident că în acest caz avem:

$$\frac{1}{q}(T) = (q(T))^{-1}.$$

În cazul general, fie $p, q \in C[X]$ și fie $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, o fracție ireductibilă. Dacă polinomul q nu se anulează pe spectrul lui T , (sau,

echivalent, funcția f este definită pe întreg spectrul lui T), atunci definim operatorul $f(T) = p(T)[q(T)]^{-1}$. Fie $\mathcal{R}(T)$ mulțimea funcțiilor raționale definite pe spectrul operatorului T .

Atunci aplicația (numită ”**calculul funcțional rațional** al lui T ”):

$$\mathcal{R}(T) \ni f \rightarrow f(T) \in \mathcal{L}(H),$$

prelungeste calculul funcțional polinomial cu păstrarea liniarității și a multiplicativității. De fapt, aplicația astfel construită este un morfism de algebre. Calculul funcțional astfel definit are următoarea proprietate de ”**transformare a spectrului**”.

54. Propoziție

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$; atunci, pentru orice $f \in \mathcal{R}(T)$, avem:

$$\sigma(f(T)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(T)\} = f(\sigma(T)).$$

Demonstrație Demonstrăm mai întâi incluziunea: $f(\sigma(T)) \subseteq \sigma(f(T))$. Pentru aceasta, fie $\nu \in f(\sigma(T))$; există deci $\lambda \in \sigma(T)$ astfel încât $\nu = f(\lambda)$. Fie funcția

$$g(z) = \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z}.$$

Demonstrăm că $g \in \mathcal{R}(T)$. Deoarece $f \in \mathcal{R}(T)$, singurul punct din $\sigma(T)$ în care funcția g ar putea să nu fie definită este λ . Dacă $f = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in C[X]$, atunci $q(\lambda) \neq 0$; avem:

$$g(z) = \frac{\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} - \frac{p(z)}{q(z)}}{\lambda - z} = \frac{p(\lambda)q(z) - q(\lambda)p(z)}{q(\lambda)q(z)(\lambda - z)}.$$

Polinomul $s(z) = p(\lambda)q(z) - q(\lambda)p(z)$ se anulează în $z = \lambda$, deci există un polinom $r \in C[X]$ astfel încât $s(z) = (\lambda - z)r(z)$; rezultă deci că funcția g este

$$g(z) = \frac{r(z)}{q(\lambda)q(z)},$$

adică $g \in \mathcal{R}(T)$, deci are sens $g(T)$. Să presupunem prin absurd că $\nu = f(\lambda) \notin \sigma(f(T))$, deci există $[f(\lambda)I - f(T)]^{-1}$. Din relația

$$f(\lambda) - f(z) = (\lambda - z)g(z)$$

și din multiplicativitatea calculului funcțional, rezultă:

$$f(\lambda)I - f(T) = (\lambda I - T)g(T).$$

Înmulțind ultima egalitate cu $[f(\lambda)I - f(T)]^{-1}$, obținem:

$$(\lambda I - T)g(T)[f(\lambda I - f(T))]^{-1} = I,$$

și, deoarece operatorii de mai sus comută, rezultă că $\lambda I - T$ este operator inversabil, contradicție cu $\lambda \in \sigma(T)$.

Demonstrăm acum incluziunea inversă: $\sigma(f(T)) \subseteq f(\sigma(T))$.

Fie $\nu \in \sigma(f(T))$ și presupunem prin absurd că $\nu \notin f(\sigma(T))$. Rezultă atunci că funcția

$$h(z) = \frac{1}{\nu - f(z)}$$

este în $\mathcal{R}(T)$ și din egalitatea $[\nu - f(z)]h(z) = 1$ rezultă

$$[\nu I - f(T)]h(T) = I,$$

adică $\nu I - f(T)$ este operator inversabil; contradicție cu $\nu \in \sigma(f(T))$.

Prelungirea calculului funcțional (rațional) și la alte clase de funcții cu păstrarea liniarității, multiplicativității și a proprietății de transformare a spectrului este o problemă importantă în teoria operatorilor. Există și alte funcții pentru care se pot da definiții elementare.

De exemplu, dacă $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\forall z \in C$ este o funcție întregă atunci

operatorul $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ se poate defini pentru orice $T \in \mathcal{L}(H)$

(deoarece seria de operatori converge) și sunt păstrate proprietățile menționate mai sus; am demonstrat de altfel acest fapt în teorema 28, cap.4.

Un alt exemplu este funcția $f(z) = \bar{z}$; în acest caz, o definiție naturală ar fi $f(T) = T^*$. De aici rezultă că dacă $g(z) = |z|^2$, atunci $g(T) = T^*T$ (sau TT^* ?); dacă operatorul T ar fi normal, definiția nu ar fi ambiguă. Să alegem de exemplu $g(T) = T^*T$, și să luăm $T = V$ operatorul de translație unilaterală pe $\ell^2(N)$, (cf exemplului 20 din paragraful precedent). Atunci proprietatea de transformare a spectrului nu mai este adevărată; într-adevăr, deoarece $g(V) = V^*V = I$, atunci

$$\sigma(g(V)) = \sigma(I) = \{1\} \text{ dar}$$

$$g(\sigma(V)) = g(\{\lambda \in C; |\lambda| \leq 1\}) = [0, 1].$$

Operatorii care admit un calcul funcțional suficient de general și cu proprietăți remarcabile sunt operatorii normali. Pentru aceasta, definim calculul

funcțional mai întâi pentru operatorii de multiplicare (ceea ce se face într-un mod natural și simplu) și apoi vom transfera calculul funcțional astfel construit la operatori normali arbitrari folosind unitar-echivalența din teorema spectrală.

55. Definiție (calculul funcțional mărginit pentru operatorii de multiplicare)

Fie $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ și fie M_ϕ operatorul de multiplicare cu ϕ definit pe spațiul $L^2(\Omega, \mu)$.

Considerăm restricția măsurii Lebesgue din plan la compactul $\sigma(M_\phi) = \text{essran}(\phi)$. Fie $F \in L^\infty(\sigma(M_\phi))$; în particular, deoarece $\sigma(M_\phi)$ este compact, F poate fi o funcție continuă.

Deoarece $\sigma(M_\phi) = \text{essran}(\phi)$, rezultă că funcția compunere, $F \circ \phi$ există (de fapt ea este definită a.p.t.; dacă funcțiile ϕ și F ar fi continue, atunci $F \circ \phi$ ar fi definită peste tot și ar fi continuă) și este în $L^\infty(\Omega, \mu)$. Există deci operatorul de multiplicare $M_{F \circ \phi} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu))$, ceea ce ne permite să definim operatorul $F(M_\phi) = M_{F \circ \phi}$. Aplicația

$$L^\infty(\sigma(M_\phi)) \ni F \rightarrow F(M_\phi) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu))$$

se numește **calculul funcțional mărginit** (în sensul că F este funcție esențial mărginită) al operatorului M_ϕ .

Se observă că operația de aplicare a lui F asupra operatorului M_ϕ , înseamnă de fapt compunerea lui F cu ϕ .

Este ușor de demonstrat că aplicația de mai sus prelungeste calculul funcțional cu funcții raționale al operatorului M_ϕ . Sunt păstrate de asemenea și proprietățile uzuale, inclusiv proprietatea de transformare a spectrului.

56. Teoremă

Cu notațiile de mai sus, avem:

(a) $(\alpha F + \beta G)(M_\phi) = \alpha F(M_\phi) + \beta G(M_\phi),$

(b) $(FG)(M_\phi) = [F(M_\phi)][G(M_\phi)],$

(c) $\overline{F}(M_\phi) = [F(M_\phi)]^*,$

(d) $\sigma(F(M_\phi)) = F(\sigma(M_\phi)),$

(e) Operatorii $F(M_\phi)$ și $G(M_\phi)$ comută,

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ și F, G funcții esențial mărginite pe spectrul operatorului M_ϕ .

Demonstrație Verificările (a), (b) și (c) sunt imediate; demonstrăm, de exemplu, (b):

$$(FG)(M_\phi) = M_{(FG) \circ \phi} = M_{(F \circ \phi)(G \circ \phi)} = M_{F \circ \phi} M_{G \circ \phi} = F(M_\phi) G(M_\phi).$$

(d) Vom face demonstrația în ipoteza că funcția F este continuă. Propunem cititorului familiarizat cu raționamentele specifice teoriei abstracte a măsurii să refacă demonstrația pentru o funcție F esențial mărginită, ([10], p.60). Enunțul este echivalent cu $\text{essran}(F \circ \phi) = F(\text{essran}(\phi))$; se observă că dacă și funcția ϕ este continuă, atunci egalitatea devine banală deoarece amândoi membri sunt egali cu închiderea imaginii funcției compuse $F \circ \phi$, adică $\overline{F(\phi(\Omega))}$.

Considerăm acum cazul general și demonstrăm incluziunea $F(\sigma(M_\phi)) \subseteq \sigma(F(M_\phi))$. Fie $\nu = F(\lambda) \in F(\sigma(M_\phi))$, cu $\lambda \in \sigma(M_\phi)$. Fie E o vecinătate a lui $F(\lambda)$; pentru a demonstra că $F(\lambda) \in \sigma(F(M_\phi))$ va trebui să demonstrăm că măsura mulțimii $(F \circ \phi)^{-1}(E)$ este strict pozitivă (nenulă). Dar $(F \circ \phi)^{-1}(E) = \phi^{-1}(F^{-1}(E))$. Deoarece E este vecinătate a lui $F(\lambda)$ și deoarece funcția F este continuă, rezultă că $F^{-1}(E)$ este vecinătate a lui λ și deci, din definiția imaginii esențiale a lui ϕ , rezultă că $\phi^{-1}(F^{-1}(E))$ are măsură strict pozitivă. Incluziunea inversă o demonstrăm prin trecere la complementare:

$$C - F(\sigma(M_\phi)) \subseteq C - \sigma(F(M_\phi)).$$

Fie deci $\lambda \notin F(\sigma(M_\phi))$. Mulțimea $\sigma(M_\phi)$ este compactă și cum F este continuă, rezultă că mulțimea $F(\sigma(M_\phi))$ este compactă. Deoarece (din ipoteză) $\lambda \notin F(\sigma(M_\phi))$, atunci există o vecinătate E a lui λ astfel încât $E \cap F(\sigma(M_\phi)) = \emptyset$. Luând imaginile inverse prin funcția F ale mulțimilor din egalitatea precedentă, obținem

$$F^{-1}(E) \cap \sigma(M_\phi) = \emptyset.$$

Luând acum imaginile inverse prin funcția ϕ , obținem

$$\phi^{-1}(F^{-1}(E)) \cap \phi^{-1}(\sigma(M_\phi)) = \emptyset.$$

Dar, din definiția imaginii esențiale, măsura mulțimii $\Omega - \phi^{-1}(\sigma(M_\phi))$ este nulă (dacă funcția ϕ ar fi continuă, atunci această mulțime ar fi vidă). Rezultă că și mulțimea $(F \circ \phi^{-1})(E)$ are măsură nulă și deci $\lambda \notin \sigma(F(M_\phi))$.

Considerăm în continuare două exemple.

(i) Fie $\phi(t) = t$, $\forall t \in [0, 1]$ și fie

$$M_\phi : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), (M_\phi f)(t) = tf(t).$$

Atunci, $\sigma(M_\phi) = [0, 1]$ și dacă $F \in L^\infty(0, 1)$, rezultă $F(M_\phi) = M_F$.

(ii) Fie acum $\psi(t) = \frac{t+i}{it+1}$, $\forall t \in R$ și fie

$$M_\psi : L^2(R) \rightarrow L^2(R), (M_\psi f)(t) = \frac{t+i}{it+1} f(t).$$

Atunci $\sigma(M_\psi) = \mathcal{S}^1$ și pentru orice funcție $F \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, avem:

$$(F(M_\psi)f)(t) = F\left(\frac{t+i}{it+1}\right)f(t), \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calculul funcțional mărginit pentru un operator normal arbitrar se construiește folosind unitar-echivalența din teorema spectrală.

57. Definiție (calculul funcțional mărginit pentru operatori normali)

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator normal și fie M_ϕ operatorul de multiplicare unitar-echivalent cu el: $T = U^{-1}M_\phi U$. Dacă F este o funcție esențial mărginită pe spectrul operatorului T , (considerat ca spațiu cu măsură cu restricția măsurii Lebesgue din plan), atunci definim $F(T) = U^{-1}F(M_\phi)U$. Din teorema de mai sus (și din proprietățile operatorilor unitar-echivalenți: propoziția 37 din paragraful precedent), rezultă că aplicația

$$L^\infty(\sigma(T)) \ni F \rightarrow F(T) \in \mathcal{L}(H)$$

are proprietățile:

(a) Liniară și multiplicativă:

$$(\alpha F + \beta G)(T) = \alpha F(T) + \beta G(T),$$

$$(FG)(T) = F(T)G(T),$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall F, G \in L^\infty(\sigma(T))$; din multiplicativitate rezultă că operatorii de forma $F(T)$ comută între ei.

(b) $\overline{F(T)} = [F(T)]^*$; de aici rezultă că toți operatorii de forma $F(T)$ sunt normali.

(c) $\sigma(F(T)) = F(\sigma(T))$.

Să considerăm ca exemplu operatorul de convoluție pe spațiul $\ell^2(Z)$ (operatorul de convoluție este operator normal).

Fie deci $\theta \in \ell^2(Z)$ astfel încât $\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$; a se vedea teoremele 40 și 51. Operatorul C_θ este unitar-echivalent cu operatorul de multiplicare cu $\mathcal{F}^{-1}\theta$, mai precis $C_\theta = \mathcal{F}^{-1}M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}\mathcal{F}$. Pentru orice funcție $F \in L^\infty(\sigma(C_\theta)) = L^\infty(\text{essran}(\mathcal{F}^{-1}\theta))$, avem $F(C_\theta) = \mathcal{F}^{-1}M_{F \circ (\mathcal{F}^{-1}\theta)}\mathcal{F}$.

În particular, (a se vedea exemplul 42), dacă $\theta = \sigma_1$, atunci $C_{\sigma_1} = W$ (operatorul de translație bilateral) și $W = \mathcal{F}^{-1}M_{\omega_1}\mathcal{F}$, unde,

$\omega_1(e^{it}) = e^{it}$. Reamintim că $\sigma(W) = \mathcal{S}^1$. Deoarece ω_1 este aplicația identică pe \mathcal{S}^1 , pentru orice funcție $F \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, avem:

$$F(W) = \mathcal{F}^{-1}M_F\mathcal{F}.$$

Mai general, dacă $n \in \mathbb{Z}$, avem $F(W^n) = \mathcal{F}^{-1}M_{F\omega_n}\mathcal{F}$, unde, $\omega_n(e^{it}) = e^{int}$.

Aplicațiile calculului funcțional sunt numeroase; indicăm în continuare câteva. Prima este existența rădăcinii pătrate pozitive pentru operatori pozitivi; comparația cu cazul finit dimensional este interesantă (a se vedea teorema 38, cap.2)

58. Teoremă (rădăcina pătrată pozitivă)

Fie $P \in \mathcal{L}(H)$ un operator pozitiv. Atunci există și este unic un operator pozitiv $Q \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $Q^2 = P$; operatorul Q se numește rădăcina pătrată pozitivă a lui P și se notează \sqrt{P} .

Demonstrație Funcția radical $f(t) = \sqrt{t}$ este o funcție continuă pe spectrul operatorului P (orice operator pozitiv are spectrul în $[0, \infty)$), deci putem defini operatorul $Q = f(P) = \sqrt{P}$. Din multiplicativitatea calculului funcțional, rezultă :

$$Q^2 = [f(P)]^2 = (f^2)(P) = \text{id}(P) = P,$$

unde, am notat cu $\text{id}(t) = t$ funcția identică.

Pentru unicitate, este suficient să observăm că un operator de multiplicare pozitiv, M_ϕ , are o unică rădăcină pătrată pozitivă, $M_{\sqrt{\phi}}$.

De exemplu, dacă $\phi(t) = t, \forall t \in [0, 1]$, atunci operatorul M_ϕ este operator pozitiv pe $L^2(0, 1)$ și

$$(\sqrt{M_\phi}f)(t) = \sqrt{t}f(t) = (M_{\sqrt{\phi}}f)(t), \forall t \in [0, 1].$$

59. Consecință

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator arbitrar. Atunci T este pozitiv dacă și numai dacă există $S \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $T = S^*S$

Demonstrație Dacă T este operator pozitiv, atunci luăm $S = \sqrt{T}$. Reciproc, orice operator de forma S^*S este pozitiv (evident).

Altă consecință a calculului funcțional este descompunerea polară pentru operatorii inversabili și pentru cei normali pe spații Hilbert infinit dimensionale; orice număr complex nenul z admite o unică

descompunere $z = ru$ cu $r > 0$ și $|u| = 1$. Dacă $T \in \mathcal{L}(C^n)$, atunci T admite o descompunere de forma $T = UP$, cu U operator unitar și P pozitiv. În general, această descompunere nu este unică decât în anumite condiții suplimentare (de exemplu dacă T este inversabil; a se vedea teorema 40, cap.2).

60. Teoremă (descompunerea polară)

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator arbitrar.

(a) Dacă T este inversabil, atunci există $U \in \mathcal{L}(H)$ operator unitar și $P \in \mathcal{L}(H)$ operator pozitiv astfel încât $T = UP$. În plus, această descompunere (polară) este unică.

(b) Dacă T este normal, atunci există o descompunere polară (nu neapărat unică) $T = UP$ cu U unitar și P pozitiv; în plus, operatorii U, P, T comută între ei.

Demonstrație (a) Fie $P = \sqrt{T^*T}$. Operatorul T fiind inversabil, rezultă că T^*T este și el inversabil, deci $0 \notin \sigma(T^*T)$. Din teorema de transformare a spectrului rezultă că $0 \notin \sigma(\sqrt{T^*T})$ deci operatorul P este inversabil. Fie $U = TP^{-1}$. Atunci U este inversabil (ceea ce este evident); U este unitar:

$$U^*U = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I,$$

Unicitatea rezultă din construcție și din unicitatea rădăcinii pătrate pozitive.

(b) Fie funcțiile

$$p(z) = |z|, \forall z \in C \text{ și } u(z) = \frac{z}{|z|}, \forall z \neq 0 \text{ și } u(0) = 1.$$

Atunci p și u sunt funcții mărginite pe spectrul lui T . Aici se poate constata necesitatea unui calcul funcțional și cu alte funcții decât continue (p este continuă dar u nu este continuă). Fie $P = p(T)$ și $U = u(T)$. Deoarece funcția p ia valori pozitive, din teorema de transformare a spectrului rezultă că operatorul P are spectrul în $[0, \infty)$. Cum P este și operator normal (din definiția 57(b)), rezultă că P este operator pozitiv. Deoarece $u(z)\overline{u(z)} = 1, \forall z \in C$, din multiplicativitatea calculului funcțional rezultă $UU^* = U^*U = I$, deci U este unitar. Din identitatea $u(z)p(z) = z, \forall z \in C$, rezultă (folosind iarăși multiplicativitatea calculului funcțional) $T = UP$.

Continuăm cu aplicații ale calculului funcțional și ale formulei de descompunere polară. Orice număr real și strict pozitiv t se poate scrie sub forma $t = e^s$, cu $s \in R$; de asemenea, orice număr complex λ cu $|\lambda| = 1$, se poate scrie sub forma $\lambda = e^{i\tau}$, cu $\tau \in R$. Pentru operatori liniari și continui pe un spațiu Hilbert, avem:

61. Propoziție

(i) Pentru orice operator pozitiv și inversabil $P \in \mathcal{L}(H)$, există un operator autoadjunct $S \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $P = \exp(S)$.

(ii) Pentru orice operator unitar $U \in \mathcal{L}(H)$, există un operator autoadjunct $A \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $U = \exp(iA)$.

Demonstrație (i) Deoarece operatorul P este pozitiv și inversabil, rezultă că $\sigma(P) \subset (0, \infty)$; rezultă deci că funcția (continuă) logaritm natural, \ln este definită pe spectrul operatorului P și deci putem defini operatorul $S = \ln(P)$; deoarece $e^{\ln(x)} = x, \forall x > 0$, avem egalitatea:

$$\exp(S) = \exp(\ln(P)) = P.$$

Din proprietățile calculului funcțional rezultă că S este operator normal, iar din teorema de transformare a spectrului rezultă incluziunea: $\sigma(S) = \ln(\sigma(P)) \subset \ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$. Din teorema 52(b) rezultă că S este operator autoadjunct.

(ii) Deoarece U este operator unitar, rezultă că spectrul său este inclus în cercul unitate: $\sigma(U) \subseteq \mathcal{S}^1$. Fie $f \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ astfel încât $\exp(if(\lambda)) = \lambda, \forall \lambda \in \mathcal{S}^1$. Facem mențiunea că o astfel de funcție există, ea putând fi, de exemplu, una din ramurile argumentului (care nu este continuă, dar este mărginită); dacă spectrul lui U nu este egal cu întreg cercul unitate, atunci există chiar funcții continue cu proprietatea $\exp(if(\lambda)) = \lambda, \forall \lambda \in \sigma(U)$. Definim operatorul $A = f(U)$; din proprietățile calculului funcțional rezultă că A este operator autoadjunct și $\exp(iA) = \exp(if(U)) = U$.

62. Teoremă

(i) Orice operator inversabil $T \in \mathcal{L}(H)$ se poate scrie ca un produs de două exponențiale, mai precis, există doi operatori autoadjuncți $S, A \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $T = \exp(iA) \exp(S)$.

(ii) Mulțimea \mathcal{G} a operatorilor inversabili din $\mathcal{L}(H)$ este conexă prin arce, adică pentru orice operator inversabil T , există o aplicație continuă $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}$ astfel încât $\gamma(0) = I$ și $\gamma(1) = T$.

Demonstrație (i) Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator inversabil și fie, conform teoremei 60(a), descompunerea sa polară (unică): $T = UP$, unde, U este operator unitar și P este operator pozitiv și inversabil. Conform propoziției anterioare, există doi operatori autoadjuncți $A, S \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $U = \exp(iA)$ și $P = \exp(S)$, deci $T = \exp(iA) \exp(S)$.

Menționăm că există operatori inversabili T care nu se pot scrie sub forma unei singure exponențiale. Pe spații finit dimensionale, această proprietate este totuși adevărată.

(ii) Fie $T \in \mathcal{G}$ și fie $A, S \in \mathcal{L}(H)$, operatori autoadjuncți astfel încât $T = \exp(iA) \exp(S)$. Fie

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}, \gamma(t) = \exp(itA) \exp(tS).$$

Este ușor de arătat că γ satisface condițiile cerute.

Capitolul 6

Aplicații în teoria sistemelor

Într-o formulare generală, un sistem este o aplicație între două spații de semnale: intrări (comenzi) și ieșiri (răspunsuri); modelul matematic pentru semnale sunt funcțiile. Desigur, pentru a obține rezultate interesante, sunt necesare unele condiții restrictive. Un caz important este cel al sistemelor liniare: aici semnalele sunt elemente ale unor spații vectoriale, iar sistemul este o aplicație liniară. O altă proprietate remarcabilă este continuitatea; modelul matematic uzual pentru sistem este atunci acela al unui operator liniar și continuu între două spații Banach. În acest capitol ne propunem să prezentăm câteva noțiuni din teoria sistemelor care se modelează în mod natural folosind conceptele și rezultatele expuse în capitolele precedente. Prin sistem vom înțelege în continuare un operator liniar și continuu pe un spațiu Hilbert. Elementele acestui spațiu (de obicei funcții de timp) vor fi intrările și ieșirile sistemului. Așa cum am mai spus, o parte din proprietățile intuitive ale unui sistem își găsesc imediat un corespondent matematic: liniaritate, continuitate. De asemenea, metodele folosite pentru studiul sistemelor sunt în mod natural rezultate de analiză funcțională. Pe lângă acestea, există și unele constrângeri fizice, cât și unele metode de studiu tipice teoriei sistemelor. Dintre acestea amintim cauzalitatea și invarianța în timp, iar ca metodă de studiu descompunerea în spații de stări a unui sistem. Prezentarea unor modele matematice pentru aceste noțiuni constituie obiectul acestui capitol. Pentru aprofundarea cunoștințelor privind modelele matematice ale teoriei sistemelor, recomandăm următoarele lucrări: [1],[7],[12],[17],[18].

6.1 Cauzalitate și invarianță în timp

Intuitiv, un sistem este cauzal dacă ieșirea la orice moment (fixat) depinde numai de valorile intrării la momente anterioare.

De exemplu să considerăm spațiul Hilbert $\ell^2(Z)$ și sistemul (operatorul) de translație bilaterală: $(Wx)(n) = x(n-1)$, $\forall n \in Z$. Evident că W satisface condiția (intuitivă) de mai sus: ieșirea la momentul n este egală cu intrarea la momentul $n-1$. Să considerăm acum adjunctul (care coincide aici cu inversul: a se vedea teorema 24, cap.5) lui W , care este $(W^*x)(n) = x(n+1)$. Evident, sistemul W^* nu este cauzal. El are chiar o proprietate duală cauzalității: ieșirea la un moment dat depinde numai de valorile intrării la momente posterioare; un astfel de sistem se numește anticauzal. Cadrul care permite o definiție pentru cauzalitate este spațiul Hilbert cu rezoluție.

1. Definiție

Fie (H, \langle, \rangle) un spațiu Hilbert (ca de obicei separabil și complex). Reamintim că un operator $P \in \mathcal{L}(H)$ se numește proiector dacă

$P^2 = P$. Dacă P și Q sunt proiectori, atunci, prin definiție, $P \leq Q$ dacă $P(H) \subseteq Q(H)$ (a se vedea paragraful 2, cap.5). Fie \mathcal{T} o mulțime total ordonată având t_o și t_∞ cel mai mic și respectiv cel mai mare element. Prin

rezoluție a identității pe spațiul H se înțelege orice familie de proiectori $\mathcal{P} = (P_t)_{t \in \mathcal{T}}$ cu proprietățile:

(i) $P_t \leq P_s$, $\forall t \leq s, t, s \in \mathcal{T}$.

(ii) $P_{t_o} = O$ și $P_{t_\infty} = I$.

(iii) Dacă $P_{t_n} \in \mathcal{P}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{t_n} x = Px$, $\forall x \in H$, atunci $P \in \mathcal{P}$.

Perechea (H, \mathcal{P}) se numește **spațiu Hilbert cu rezoluție**. Evident, pe același spațiu Hilbert se pot defini mai multe rezoluții. Interpretarea intuitivă a definiției este: mulțimea \mathcal{T} este timpul, iar dacă $x \in H$, atunci $P_t x$ este partea (eșantionul) lui x de până la momentul t , iar $(I - P_t)x$ este partea lui x de după momentul t .

Vom introduce în continuare rezoluțiile canonice pe câteva spații Hilbert uzuale.

2. Exemple

(a) Pe spațiul C^n , rezoluția canonică este definită de mulțimea de proiectori $\{P_k; k = 0, 1, 2, \dots, n\}$, unde $P_o = O$ și $(P_k x)(m) = x(m)$ dacă $m \leq k$ și 0 dacă $m > k$. Evident, în acest caz $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

(b) Să considerăm acum spațiul Hilbert $\ell^2(Z)$.

Fie $\mathcal{T} = \{-\infty\} \cup Z \cup \{\infty\}$, $P_{-\infty} = O$, $P_\infty = I$ și pentru orice $n \in Z$ definim proiectorul $(P_n x)(m) = x(m)$, dacă $m \leq n$ și 0 dacă $m > n$. Rezoluția

$\mathcal{P} = (P_n)_{n \in \mathcal{T}}$ este rezoluția canonică pe $\ell^2(Z)$.

(c) Pe spațiul $\ell^2(N)$ rezoluția canonică se definește analog.

$\mathcal{T} = N \cup \{\infty\}$, $P_o = O$, $P_\infty = I$, iar P_n cu $n \in N$ ca mai sus.

(d) Fie acum spațiul Hilbert al funcțiilor de pătrat integrabil pe R , $L^2(R)$. Fie $\mathcal{T} = \{-\infty\} \cup R \cup \{\infty\}$, $P_{-\infty} = O$ și $P_\infty = I$. Pentru orice $t \in R$, definim proiectorul (numit și trunchierea la momentul t) $(P_t f)(x) = f(x)$ dacă $x \leq t$ și 0 dacă $x > t$.

Analog se definesc rezoluțiile canonice pe spațiile $L^2(0, \infty)$ și $L^2[0, 1]$.

3. Definiție

Fie (H, \mathcal{P}) un spațiu Hilbert cu rezoluție și fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Sistemul T se numește **cauzal** (sau operator **subdiagonal, inferior triunghiular**) în raport cu rezoluția fixată pe H dacă pentru orice $x, y \in H$ cu proprietatea $P_t x = P_t y$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$, rezultă $P_t T x = P_t T y$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$. Interpretarea intuitivă este evidentă: dacă intrările x și y sunt egale până la momentul t , atunci și ieșirile corespunzătoare, $T x$ și $T y$ sunt egale până la momentul t . Folosind liniaritatea operatorului T , obținem următoarele caracterizări echivalente:

4. Propoziție

Fie (H, \mathcal{P}) un spațiu Hilbert cu rezoluție și fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) T este cauzal în raport cu rezoluția \mathcal{P} .

(ii) $P_t T = P_t T P_t$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$.

(iii) $T(I - P_t) = (I - P_t)T(I - P_t)$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$.

(iv) Pentru orice $P_t \in \mathcal{P}$, subspațiul $\text{Ker}(P_t)$ este invariant pentru operatorul T .

Demonstrație (i) \Rightarrow (ii) Pentru $\forall x \in H$, avem $P_t[(I - P_t)x] = 0 = P_t 0$ și deci, deoarece T este cauzal, rezultă $P_t[T(I - P_t)x] = P_t T 0 = 0$, adică $P_t T x = P_t T P_t x$.

Echivalența (ii) \Leftrightarrow (iii) este evidentă.

(iii) \Rightarrow (iv) Fie $x \in \text{Ker}(P_t)$; din (ii), avem: $P_t T x = P_t T P_t x = 0$.

(iv) \Rightarrow (i) Fie $x, y \in H$ astfel încât $P_t x = P_t y$. Rezultă că $P_t(x - y) = 0$, deci $x - y \in \text{Ker}(P_t)$. Din ipoteza (iv), rezultă că $T(x - y) \in \text{Ker}(P_t)$, adică $P_t T(x - y) = 0$, ceea ce arată că T este sistem cauzal.

5. Definiție

Fie (H, \mathcal{P}) un spațiu Hilbert cu rezoluție. Noțiunea duală cauzalității este anticauzalitatea. Un sistem $T \in \mathcal{L}(H)$ se numește **anticauzal** în raport cu rezoluția \mathcal{P} (sau **operator supradiagonal, superior triunghiular**) dacă

adjunctul său, T^* , este cauzal.

Un sistem care este și cauzal și anticauzal se numește sistem **fără memorie**. Notăm cu $\mathcal{C}(H)$ mulțimea sistemelor cauzale pe H , cu $\mathcal{AC}(H)$ mulțimea sistemelor anticauzale și cu $\mathcal{M}(H)$ mulțimea sistemelor fără memorie.

Analogul propoziției anterioare pentru sisteme anticauzale este:

6. Propoziție

Fie (H, \mathcal{P}) un spațiu Hilbert cu rezoluție și fie $T \in \mathcal{L}(H)$; următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) T este anticauzal în raport cu rezoluția \mathcal{P} .

(ii) $(I - P_t)T = (I - P_t)T(I - P_t)$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$.

(iii) $TP_t = P_tTP_t$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$.

(iv) Pentru orice $P_t \in \mathcal{P}$, subspațiul $\text{Im}(P_t)$ este subspațiu invariant pentru operatorul T .

Demonstrație Totul rezultă din echivalența (a se vedea propoziția 5, cap.5): subspațiul K este invariant la $T \Leftrightarrow$ subspațiul K^\perp este invariant la T^* și din egalitatea (a se vedea propoziția 6, cap.5):

$$\text{Ker}(T) = (\text{Im}(T^*))^\perp.$$

7. Observație

Din propozițiile 4 și 6 rezultă că un sistem T este fără memorie dacă și numai dacă pentru orice $P_t \in \mathcal{P}$, subspațiile $\text{Ker}(P_t)$ și $\text{Im}(P_t)$ sunt subspații reducătoare pentru T , sau, echivalent, orice proiector $P_t \in \mathcal{P}$ comută cu T , adică: $P_tT = TP_t$; (a se vedea propoziția 15, cap.5).

8. Propoziție

Fie (H, \mathcal{P}) un spațiu Hilbert cu rezoluție. Atunci mulțimile $\mathcal{C}(H)$ și $\mathcal{AC}(H)$ sunt algebre Banach, iar $\mathcal{M}(H)$ este C^* -algebră.

Demonstrație Dacă T și S sunt doi operatori cauzali, atunci orice combinație liniară a lor este de asemenea operator cauzal, deoarece, conform propoziției 4, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ și $P_t \in \mathcal{P}$, avem:

$$\begin{aligned} T(\text{Ker}(P_t)) \subseteq \text{Ker}(P_t) \text{ și } S(\text{Ker}(P_t)) \subseteq \text{Ker}(P_t) &\Rightarrow \\ \Rightarrow (\alpha T + \beta S)(\text{Ker}(P_t)) \subseteq \text{Ker}(P_t). \end{aligned}$$

Produsul: $TS(\text{Ker}(P_t)) \subseteq \text{Ker}(P_t)$. Pentru a demonstra completitudinea, fie T_n un șir de operatori cauzali care converge la T și fie $x \in \text{Ker}(P_t)$; atunci $P_tT_nx = \lim_{n \rightarrow \infty} P_tT_nx = 0$, ceea ce arată că T este operator cauzal. Analog se demonstrează și pentru operatorii anticauzali. În cazul operatorilor fără

memorie, trebuie să observăm în plus că adjunctul unui operator fără memorie este și el fără memorie.

9.Exemple

(a) În continuare vom caracteriza operatorii cauzali pe C^n . Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ a cărui matrice în baza canonică este $A = (a_{ij})_{ij}$. Din propoziția 6 rezultă că T este cauzal dacă și numai dacă pentru orice $x \in C^n$ și $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem:

$$x(m) = 0 \text{ dacă } m \leq k \Rightarrow (Tx)(m) = 0 \text{ dacă } m \leq k.$$

Dar $(Tx)(m) = \sum_{k=1}^n a_{mk}x(k)$ și deci obținem:

$$T \text{ este cauzal} \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i < j.$$

Deci un sistem pe C^n este cauzal (în raport cu rezoluția canonică asociată bazei canonice) dacă și numai dacă matricea sa în baza canonică este inferior triunghiulară.

Deoarece adjunctul T^* are matricea $(\overline{a_{ji}})_{ij}$, rezultă că sistemul T este anti-cauzal dacă și numai dacă matricea $(a_{ij})_{ij}$ este superior triunghiulară. Din cele două caracterizări rezultă că un sistem pe C^n este fără memorie dacă și numai dacă matricea sa (în baza canonică) este o matrice diagonală.

Să presupunem acum că operatorul T este cauzal și inversabil. Deoarece inversa unei matrice inferior triunghiulare este tot inferior triunghiulară, rezultă că pe spații finit dimensionale inversul unui sistem cauzal și inversabil este și el cauzal. Așa cum vom vedea în exemplele următoare, această proprietate nu mai este adevărată pe spații Hilbert infinit dimensionale.

(b) Fie acum spațiul $\ell^2(Z)$ și fie $(\sigma_n)_{n \in Z}$ baza canonică; (a se vedea exemplul 17(ii)). Fie $T \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$ și fie $(a_{ij})_{i,j \in Z}$ matricea sa (infinită), adică $a_{ij} = \langle T\sigma_j, \sigma_i \rangle$. Printr-un raționament similar cu cel din exemplul (a), obținem că T este cauzal dacă și numai dacă $a_{ij} = 0, \forall i < j, i, j \in Z$, adică matricea sa (în baza $(\sigma_n)_{n \in Z}$) este inferior triunghiulară. În particular, translația bilaterală W este sistem cauzal: matricea sa (în baza $(\sigma_n)_{n \in Z}$) este

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j + 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Așa cum am văzut în teorema 24, cap.5, W este unitar și deci inversul său este egal cu adjunctul, care, conform definiției este anticauzal. Cum matricea

lui W^* este superior triunghiulară, rezultă că operatorul W este cauzal și inversabil, dar inversul său nu este cauzal. În acest caz, operatorii fără memorie sunt operatorii diagonali (exemplul 1, cap.5).

(c) Să considerăm acum cazul particular al unui operator de convoluție pe $\ell^2(Z)$, $C_\theta x = \theta \star x$, $\forall x \in \ell^2(Z)$, unde $\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, (a se vedea definiția 38, cap.5). Deoarece matricea (infinită) a lui C_θ este $a_{ij} = \theta(i - j)$, rezultă că

$$C_\theta \text{ este cauzal dacă și numai dacă } \theta(n) = 0, \forall n < 0.$$

O formulare echivalentă este următoarea:

Sistemul C_θ este cauzal dacă și numai dacă funcția (numită funcția de transfer a sistemului), $\mathcal{F}^{-1}\theta$ este esențial mărginită și analitică pe cerc, adică: $\mathcal{F}^{-1}\theta \in H^\infty(\mathcal{S}^1)$, (a se vedea exemplul 2(v), cap.4); aceasta deoarece coeficienții săi Fourier de indici negativi sunt nuli:

$$\widehat{\mathcal{F}^{-1}\theta}(n) = \theta(n) = 0, \forall n < 0.$$

Interpretând spațiul $\ell^2(Z)$ ca **domeniul timp** și $L^2(\mathcal{S}^1)$ ca **domeniul frecvență**, rezultă (pentru sisteme de convoluție), dualitatea:

cauzalitate (în domeniul timp) \leftrightarrow **analicitate** (în domeniul frecvență). Dacă sistemul de convoluție C_θ este și inversabil, (ceea ce este echivalent cu $0 \notin \text{essran}(\mathcal{F}^{-1}\theta)$): cf. corolarului 41(c), cap.5), atunci inversul său este cauzal dacă și numai dacă funcția $\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}$ este în subalgebra $H^\infty(\mathcal{S}^1)$. În concluzie, am obținut:

Un sistem de convoluție pe $\ell^2(Z)$ este **cauzal și are un invers cauzal** dacă și numai dacă $\mathcal{F}^{-1}\theta$ și $\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}$ sunt **analitice**, adică funcția $\mathcal{F}^{-1}\theta$ este **funcție exterioară** ("outer function": [11], p.61).

(d) Caracterizăm acum operatorii integrali cauzali pe spațiul $L^2(R)$. Fie deci (a se vedea definiția 46, cap.5) $K : R^2 \rightarrow C$ o funcție de pătrat integrabil și $(T_K f)(x) = \int_R K(x, y) f(y) dy$, $\forall f \in L^2(R)$. Din exemplul 2(d) și din propoziția 4 rezultă că T_K este cauzal dacă și numai dacă pentru orice $t \in R$ și pentru orice funcție $f \in L^2(R)$ cu proprietatea $f(s) = 0, \forall s \leq t$ rezultă $(T_K f)(s) = 0, \forall s \leq t$. Fie $t \in R$ fixat și fie $f \in L^2(R)$ astfel încât $f(s) = 0, \forall s \leq t$. Pentru orice $s < t$, avem:

$$\begin{aligned} (T_K f)(s) &= \int_R K(s, x) f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^s K(s, x) f(x) dx + \int_s^\infty K(s, x) f(x) dx = \int_s^\infty K(s, x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Rezultă deci că $(T_K f)(s) = 0$ dacă și numai dacă

$$\int_s^\infty K(s, x) f(x) dx = 0.$$

Deoarece funcția f este arbitrară pe intervalul (s, ∞) , din egalitatea de mai sus rezultă $K(s, x) = 0, \forall s < x$, ceea ce încheie demonstrația.

Pritr-un raționament similar celui de mai sus, se poate demonstra că operatorul integral T_K este anticauzal dacă și numai dacă nucleul K verifică egalitatea $K(x, y) = 0, \forall x > y$. În particular, rezultă că nu există operatori integrali (neidentici nuli) fără memorie pe $L^2(R)$.

O clasă de operatori fără memorie pe acest spațiu este clasa operatorilor de multiplicare: pentru orice $\phi \in L^\infty(R)$, operatorul $M_\phi f = \phi f, \forall f \in L^2(R)$ este fără memorie; lăsăm demonstrația ca exercițiu.

(e) În cazul particular al unui operator de convoluție pe R , (a se vedea definiția 43, cap.5), $(C_k f)(x) = \int_R k(x-y) f(y) dy, \forall f \in L^2(R)$, din exemplul de mai sus rezultă că C_k este cauzal dacă și numai dacă nucleul k are suportul inclus în $[0, \infty) : k(x) = 0, \forall x < 0$.

O altă proprietate remarcabilă pe care o pot avea sistemele liniare este invarianța în timp. O definiție generală (pe un spațiu Hilbert abstract) a acestei noțiuni depășește cadrul acestei lucrări; se pot consulta în această direcție: [7], p.119; [17], p.55. Vom defini noțiunea de sistem invariant în timp pe spațiile $\ell^2(Z)$ și $L^2(R)$.

10. Definiție

Fie W operatorul de translație bilateral pe spațiul $\ell^2(Z)$, adică:

$(Wx)(n) = x(n-1), \forall n \in Z$. Un sistem $T \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$ se numește **invariant în timp** dacă $TW = WT$. Evident că un sistem invariant în timp comută cu orice putere a lui W : $TW^k = W^k T, \forall k \in Z$. Deoarece $W^k x = \sigma_k \star x$, rezultă că T este invariant în timp dacă și numai dacă

$$\sigma_k \star (Tx) = T(\sigma_k \star x), \forall x \in \ell^2(Z), \forall k \in Z.$$

Invarianța în timp pe $L^2(R)$ se definește după cum urmează. Fie, pentru orice $s \in R$ fixat, operatorul de translație

$$L_s : L^2(R) \rightarrow L^2(R), (L_s f)(t) = f(t-s).$$

Un sistem $T \in \mathcal{L}(L^2(R))$ se numește **invariant în timp** dacă și numai dacă $TL_s = L_s T, \forall s \in R$.

Să observăm că în cele două definiții date mai sus, avem de fiecare dată

un grup abelian $(G, +)$, ($G = Z$, respectiv $G = R$), un spațiu Hilbert H , ($H = \ell^2(Z)$ și respectiv $H = L^2(R)$) și o aplicație $\mathcal{R} : G \rightarrow \mathcal{L}(H)$, ($\mathcal{R}(k) = W^k$ și respectiv $\mathcal{R}(s) = L_s$) cu proprietățile:

- (i) $\mathcal{R}(0) = I$.
- (ii) $\mathcal{R}(u + v) = \mathcal{R}(u)\mathcal{R}(v)$, $\forall u, v \in G$.
- (iii) Operatorul $\mathcal{R}(u)$ este unitar pentru orice $u \in G$.
- (iv) Aplicația $H \times G \ni (f, u) \rightarrow (\mathcal{R}(u))f \in H$ este continuă.

O aplicație \mathcal{R} cu proprietățile de mai sus se numește **reprezentare continuă și unitară** a grupului G pe spațiul H .

În aceste condiții, definiția generală a sistemelor invariante în timp este: sistemul $T \in \mathcal{L}(H)$ se numește **invariant în timp** dacă $\mathcal{R}(u)T = T\mathcal{R}(u)$, pentru orice $u \in G$; pentru completări, recomandăm [7]; [12]; [17].

11. Teoremă

Fie $T \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) T este invariant în timp.
- (b) T este operator de convoluție, adică există $\theta : Z \rightarrow C$ astfel încât $Tx = C_\theta x = \theta \star x$, $\forall x \in \ell^2(Z)$.

Demonstrație Implicația (b) \Rightarrow (a) este evidentă deoarece operatorii de convoluție comută între ei.

Fie $T \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$ astfel încât $TW = WT$. Dacă $(a_{ij})_{i,j \in Z}$ este matricea lui T (în baza canonică, $\{\sigma_k\}_{k \in Z}$), atunci din egalitatea $TW = WT$, obținem:

$$\sum_{k \in Z} a_{ik+1}x(k) = \sum_{k \in Z} a_{i-1k}x(k), \forall x \in \ell^2(Z), \forall i \in Z.$$

De aici rezultă imediat că $a_{ij} = a_{i+1j+1}$, $\forall i, j \in Z$; prin inducție (sau folosind direct egalitățile $TW^k = W^kT$, $\forall k \in Z$), rezultă:

$$a_{ij} = a_{i-kj-k}, \forall i, j, k \in Z.$$

În concluzie, matricea sistemului T este constantă de-a lungul diagonalelor paralele cu diagonala principală (matrice Toeplitz), adică există $\theta : Z \rightarrow C$ astfel încât $a_{ij} = \theta(i - j)$, $\forall i, j \in Z$, deci sistemul T este un sistem de convoluție: $Tx = C_\theta x = \theta \star x$. Funcția $\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ se numește **funcția de transfer a sistemului**; ea are proprietatea:

$$\frac{\mathcal{F}^{-1}(Tx)}{\mathcal{F}^{-1}x} = \mathcal{F}^{-1}\theta,$$

deci raportul dintre transformata Fourier (inversă) a ieșirii și transformata Fourier (inversă) a intrării este constant (nu depinde de intrarea x). În

general, pentru un sistem arbitrar, această proprietate constituie definiția funcției de transfer a sistemului (dacă ea există).

Operatorii integrali invariанți în timp pe $L^2(R)$ admit o caracterizare asemănătoare.

12. Propoziție

Fie $K : R^2 \rightarrow C$ o funcție de pătrat integrabil și fie $T_K : L^2(R) \rightarrow L^2(R)$ operatorul integral asociat, adică: $(T_K f)(x) = \int_R K(x, y)f(y)dy$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) T_K este invariant în timp.

(b) T_K este operator de convoluție, adică există $k : R \rightarrow C$ astfel încât $K(x, y) = k(x - y)$, deci $T_K f = C_k f = k \star f$.

Lăsăm demonstrația ca exercițiu.

Reiese clar din exemplele prezentate că există o legătură profundă între noțiunea de sistem invariant în timp și operația de convoluție. Menționăm de asemenea că noțiunea de sistem invariant în timp (și legătura ei cu operația de convoluție) se studiază și pentru sisteme de tip distribuție; recomandăm în acest sens [17], p.55.

6.2 Spațiul stărilor

Intuitiv, starea (la momentul t) a unui sistem $T \in \mathcal{L}(H)$ este acea informație (eventual minimală) necesară pentru ca din cunoașterea valorilor intrării posterioare momentului t să putem deduce valorile ieșirii posterioare momentului t .

13. Definiție

Fie (H, \mathcal{P}) un spațiu Hilbert cu rezoluție (cu notațiile din definiția 1) și fie $T \in \mathcal{L}(H)$. O **descompunere în spații de stări** (state space decomposition) a sistemului T este orice familie de triplete

$\{(X_t, \lambda_t, \theta_t); t \in \mathcal{T}\}$ cu proprietățile:

(i) X_t este spațiu Hilbert, $\forall t \in \mathcal{T}$.

(ii) $\lambda_t : H \rightarrow X_t$ este un operator liniar și continuu astfel încât $\lambda_t = \lambda_t P_t, \forall t \in \mathcal{T}$.

(iii) $\theta_t : X_t \rightarrow H$ este un operator liniar și continuu astfel încât $\theta_t = (I - P_t)\theta_t, \forall t \in \mathcal{T}$.

(iv) $(I - P_t)T P_t = \theta_t \lambda_t$.

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{(I - P_t)TP_t} & H \\
 \searrow \lambda_t & & \nearrow \theta_t \\
 & X_t &
 \end{array}$$

În această definiție, X_t se numește **spațiul stărilor la momentul t** , λ_t este aplicația **intrare-stare**, iar θ_t aplicația **stare-ieșire**. Dacă $u \in H$ este o intrare arbitrară, atunci $x_t = \lambda_t u \in X_t$ se numește **starea sistemului T la momentul t , corespunzătoare intrării u** .

Să considerăm o intrare $u \in H$ și fie $t \in \mathcal{T}$. Să calculăm valorile ieșirii Tu posterioare momentului t :

$$\begin{aligned}
 (I - P_t)Tu &= (I - P_t)T[P_t + (I - P_t)]u = \\
 &= (I - P_t)TP_t u + (I - P_t)T(I - P_t)u = \theta_t \lambda_t u + (I - P_t)T(I - P_t)u = \\
 &= \theta_t x_t + (I - P_t)T(I - P_t)u.
 \end{aligned}$$

De aici rezultă că, într-adevăr, cunoașterea valorilor intrării posterioare momentului t (adică $(I - P_t)u$) și a cuplului λ_t, θ_t (adică a stării la momentul t) permite cunoașterea valorilor ieșirii posterioare momentului t .

14.Exemple

(i) Orice sistem $T \in \mathcal{L}(H)$ admite o descompunere "trivială" în spații de stări, considerând $X_t = H$, $\lambda_t = P_t$ și $\theta_t = (I - P_t)T$, $\forall t \in \mathcal{T}$. Această descompunere nu este interesantă deoarece aici spațiul stărilor (H) este prea mare. Așa cum vom vedea în continuare, sunt interesante acele descompuneri în care spațiul stărilor este "mic"; o situație tipică în acest sens este aceea când spațiul stărilor X_t are dimensiune finită, (deși H are dimensiune infinită).

(ii) Sistemul diferențial (sistem dinamic liniar)

Fie matricele $A \in \mathcal{M}_n(R)$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$, $C \in \mathcal{M}_{1,n}(R)$ și $D \in R$. În cele ce urmează, spațiul Hilbert $L^2(0, 1)$ este considerat cu rezoluția canonică, $(P_t)_{t \in [0,1]}$.

Fie $u \in L^2(0, 1)$ și fie $x : [0, 1] \rightarrow R^n$ soluția problemei Cauchy

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0.$$

Fie operatorul (numit ”sistem diferențial” sau ”sistem dinamic liniar”)

$$\mathcal{D} : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), \mathcal{D}u = y, \text{ unde, } y(t) = Cx(t) + Du(t), \forall t \in [0, 1].$$

Din teoria ecuațiilor diferențiale rezultă ([1], p.276):

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds, \forall t \in [0, 1],$$

și deci $y(t) = (\mathcal{D}u)(t) = \int_0^t Ce^{A(t-s)} Bu(s) ds + Du(t), \forall t \in [0, 1]$. Pro-punem ca exercițiu verificarea faptului că \mathcal{D} este un operator liniar și continuu pe $L^2(0, 1)$. Se poate arăta (prin translația $y - Du = v$) că proprietățile sistemului \mathcal{D} nu se schimbă dacă presupunem că $D = 0$; vom face de aici înainte această ipoteză.

Vom construi acum o descompunere (canonică) în spații de stări a sistemului \mathcal{D} .

Fie, pentru orice $t \in [0, 1]$, $X_t = R^n$ și fie aplicațiile:

$$\lambda_t : L^2(0, 1) \rightarrow R^n, \lambda_t u = x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds,$$

$$\theta_t : R^n \rightarrow L^2(0, 1), (\theta_t \xi)(s) = \begin{cases} Ce^{A(s-t)} \xi, & \text{dacă } s \geq t \\ 0, & \text{dacă } s < t \end{cases}$$

Înainte de a demonstra că descompunerea de mai sus verifică definiția 13, să observăm că în acest caz, spațiul stărilor (R^n) este același la orice moment t și este finit dimensional.

Pentru orice $t \in [0, 1]$ și $u \in L^2(0, 1)$, avem:

$$\lambda_t u = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds = \int_0^t e^{A(t-s)} B(P_t u)(s) ds = \lambda_t P_t u.$$

$$(\theta_t \xi)(s) = \begin{cases} Ce^{A(s-t)} \xi, & \text{dacă } s \geq t \\ 0, & \text{dacă } s < t \end{cases} = [(I - P_t)\theta_t \xi](s).$$

Este clar că pentru orice $s < t$, avem:

$$[(I - P_t)TP_t u](s) = 0 = (\theta_t \lambda_t u)(s).$$

Fie acum $s \geq t$; avem:

$$\begin{aligned} [(I - P_t)TP_t u](s) &= (TP_t u)(s) = \int_0^s Ce^{A(s-\tau)} BP_t u(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t Ce^{A(s-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_t^s Ce^{A(s-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = (\theta_t \lambda_t u)(s). \end{aligned}$$

Vom nota (A, B, C) descompunerea (canonică) definită mai sus.

(iii) Sistemul dinamic liniar se poate defini și pe spațiul Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Pentru aceasta, fie matricele A, B, C ca în exemplul anterior; în plus, vom presupune că matricea A este **stabilă**, adică valorile proprii ale lui A sunt toate în semiplanul stâng: $\{z = a + ib \in \mathbb{C}; a < 0\}$. Pentru orice $u \in L^2(\mathbb{R})$, considerăm sistemul diferențial:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

cu condiția inițială $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$. Atunci soluția (unică) a problemei Cauchy de mai sus este:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Sistemul dinamic liniar pe \mathbb{R} este operatorul

$$\mathcal{D} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \mathcal{D}u = Cx.$$

Pentru demonstrații și completări, recomandăm [12], p.42. Descompunerea canonică este $\{(R^n, \lambda_t, \theta_t); t \in \mathbb{R}\}$, unde:

$$\lambda_t : L^2 \rightarrow R^n, \lambda_t u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau,$$

$$\theta_t : R^n \rightarrow L^2(\mathbb{R}), (\theta_t \xi)(\tau) = \begin{cases} Ce^{A(t-\tau)} \xi, & \text{dacă } \tau \geq t \\ 0, & \text{dacă } \tau < t \end{cases}$$

Lăsăm ca exercițiu demonstrația.

(iv) Sistemul discret (sistem "diferență")

Analogul discret al exemplului anterior este definit după cum urmează. Fie matricele A, B, C ca mai sus și fie $u \in \ell^2(\mathbb{N})$. Fie $x : \mathbb{N} \rightarrow R^n$ soluția recurenței:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), x(0) = 0.$$

Sistemul diferență este operatorul liniar și continuu

$$\ell^2(\mathbb{N}) \ni u \rightarrow y \in \ell^2(\mathbb{N}), \text{ unde } y(k) = Cx(k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Este ușor de demonstrat că

$$y(k) = Cx(k) = C \sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu(k-1-j), \forall k \geq 1.$$

Spațiul stărilor este $X_k = R^n$, $\forall k \in N$ și:

$$\lambda_k : \ell^2(N) \rightarrow R^n, \lambda_k u = x(k),$$

$$\theta_k : R^n \rightarrow \ell^2(N), (\theta_k \xi)(j) = \begin{cases} CA^{j-k} \xi & j \geq k \\ 0 & j < k - 1 \end{cases}$$

Lăsăm ca exercițiu demonstrația faptului că $(X_k, \lambda_k, \theta_k)_{k \in N}$ este o descompunere în sensul definiției 13, pe care o vom nota (A, B, C) .

(v) În toate exemplele de până acum, spațiul stărilor a fost același la fiecare moment: $X_t = R^n$, $\forall t$. Dăm în continuare un exemplu în care spațiul stărilor este variabil în timp.

Pentru aceasta, vom face observația că pentru a defini o descompunere în spații de stări a unui sistem T , este suficient să definim operatorii $(I - P_t)TP_t$, $\forall t$; menționăm că, în general, familia de operatori $\{(I - P_t)TP_t; t \in \mathcal{T}\}$ nu determină în mod unic sistemul T . Totuși, în exemplul care urmează, sistemul T este unic determinat în acest mod; pentru demonstrații și completări, recomandăm [7], p.135.

Fie $H = \ell^2(N)$ cu rezoluția canonică (cf. exemplului 2(c)) și fie $\{\sigma_n\}_{n \in N}$ baza sa canonică. Fie:

$$(I - P_n)TP_n u = \sum_{k=0}^n \langle u, \sigma_k \rangle \sigma_{n+1+k}.$$

Așa cum am menționat, familia $\{(I - P_n)TP_n; n \in N\}$ determină sistemul T . O descompunere în spații de stări pentru sistemul T se poate obține după cum urmează; pentru orice $n=0,1,2,\dots$, definim:

$$\lambda_n : \ell^2(N) \rightarrow R^{n+1}, \lambda_n u = (\langle u, \sigma_0 \rangle, \langle u, \sigma_1 \rangle, \dots, \langle u, \sigma_n \rangle).$$

$$\theta_n : R^{n+1} \rightarrow \ell^2(N), \theta_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n x_k \sigma_{n+1+k}.$$

Se demonstrează fără dificultate că $\{R^{n+1}, \lambda_n, \theta_n; n \in N\}$ este o descompunere în spații de stări pentru T . Observăm că spațiul stărilor este finit dimensional la orice moment, dar, dimensiunea sa crește odată cu trecerea timpului: R, R^2, R^3, \dots

15. Definiție

Fie H un spațiu Hilbert cu rezoluție și fie $T \in \mathcal{L}(H)$. O descompunere $\{X_t, \lambda_t, \theta_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ se numește **complet controlabilă** dacă pentru orice $t \in \mathcal{T}$, imaginea aplicației λ_t este subspațiu dens în X_t , adică $\forall t \in \mathcal{T}, \forall x \in X_t$ și

$\forall \epsilon > 0, \exists u \in H$ astfel încât $\| \lambda_t u - x \| < \epsilon$.

Intuitiv, o descompunere este complet controlabilă dacă la orice moment, pentru orice stare dată, există o intrare care să aducă sistemul oricât de aproape de starea dată.

Descompunerea $\{X_t, \lambda_t, \theta_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ se numește **complet observabilă** dacă toți operatorii θ_t sunt mărginiți inferior (a se vedea definiția 13, cap.3), adică $\forall t \in \mathcal{T}, \exists \epsilon > 0$ astfel încât $\| \theta_t x \| \geq \epsilon \| x \|, \forall x \in X_t$.

Intuitiv, complet observabilitate înseamnă posibilitatea determinării stării la orice moment dat dacă se cunosc valorile intrărilor și ieșirilor posterioare momentului dat.

O descompunere care este și complet controlabilă și complet observabilă se numește **descompunere minimală**.

Propunem ca exercițiu faptul că descompunerea (variabilă în timp), construită în exemplul 14(v) este minimală. Pentru sistemul dinamic liniar, vom demonstra mai întâi un criteriu de minimalitate pentru descompunerea sa canonică.

Un punct forte al modelului matematic prezentat aici pentru noțiunea de stare este și următoarea teoremă de existență a descompunerilor minimale pentru un sistem arbitrar.

16. Teoremă

Fie H un spațiu Hilbert cu rezoluție și fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Atunci T admite o descompunere minimală.

Demonstrație Construim mai întâi spațiul stărilor la un moment dat. Fie deci $t \in \mathcal{T}$ fixat; definim pe spațiul $P_t(H)$ relația de echivalență:

$$x \sim_t y \Leftrightarrow (I - P_t)TP_t x = (I - P_t)TP_t y, \forall x, y \in P_t(H).$$

Mulțimea claselor de echivalență,

$$P_t(\widehat{H}) = \{[x]_t; x \in P_t(H)\}$$

este spațiu vectorial cu operațiile uzuale:

$$[x]_t + [y]_t = [x + y]_t \text{ și } \alpha[x]_t = [\alpha x]_t, \forall x, y \in P_t(H), \forall \alpha \in C.$$

Se demonstrează de asemenea că aplicația:

$$\langle [x]_t, [y]_t \rangle_t = \langle (I - P_t)TP_t x, (I - P_t)TP_t y \rangle,$$

este un produs scalar pe $P_t(\widehat{H})$, care se organizează astfel ca un spațiu prehilbertian. Definim spațiul stărilor la momentul t , X_t , ca fiind completatul

(închiderea) acestui spațiu prehilbertian.

Definim acum operatorii λ_t și θ_t .

$$\lambda_t : H \rightarrow X_t, \lambda_t x = [P_t x]_t.$$

Operatorul θ_t este definit inițial pe subspațiul (dens) $P_t(\widehat{H})$ prin formula:

$$\theta_t[x]_t = (I - P_t)TP_t x.$$

Demonstrăm acum că θ_t este continuu, și deci el poate fi prelungit prin continuitate la întreg spațiul X_t :

$$\| \theta_t[x]_t \|^2 = \| (I - P_t)TP_t x \|^2 = \langle (I - P_t)TP_t x, (I - P_t)TP_t x \rangle = \| [x]_t \|^2,$$

ultima normă fiind norma din X_t . Din relația de mai sus rezultă că operatorul θ_t este o izometrie și deci, în mod evident, el este și mărginit inferior. Demonstrăm acum că λ_t este continuu:

$$\| \lambda_t x \| = \| \theta_t \lambda_t x \| = \| (I - P_t)TP_t x \| \leq \| T \| \| x \|, \forall x \in H.$$

Se verifică prin calcul direct egalitățile:

$$\lambda_t = \lambda_t P_t, \theta_t = (I - P_t)\theta_t \text{ și } (I - P_t)TP_t = \theta_t \lambda_t.$$

Demonstrăm acum că descompunerea este minimală. Complet observabilitatea a fost deja demonstrată, deoarece θ_t este mărginit inferior. Pe de altă parte, din definiție, λ_t are imagine densă în X_t , deci descompunerea este și complet controlabilă.

17. Teoremă (Criteriile generale de controlabilitate și observabilitate)

Fie H un spațiu Hilbert cu rezoluție, fie $T \in \mathcal{L}(H)$ și fie $\{X_t, \lambda_t, \theta_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ o descompunere a sa.

(i) Descompunerea este complet controlabilă dacă și numai dacă pentru orice $t \in \mathcal{T}$, avem:

$$\langle \lambda_t \lambda_t^* x, x \rangle > 0, \forall x \in X_t, x \neq 0.$$

(ii) Descompunerea este complet observabilă dacă și numai dacă pentru orice $t \in \mathcal{T}$, avem:

$$\langle \theta_t^* \theta_t u, u \rangle > 0, \forall u \in H, u \neq 0.$$

Demonstrație (i) Dacă descompunerea este complet controlabilă, atunci, din definiție, rezultă că operatorii λ_t au imagine densă. Din propoziția

29,cap.3, rezultă că λ_t^* este injectiv, $\forall t \in \mathcal{T}$ și deci pentru orice $x \in H$, $x \neq 0$, avem:

$$\langle \lambda_t \lambda_t^* x, x \rangle = \langle \lambda_t^* x, \lambda_t^* x \rangle = \|\lambda_t^* x\|^2 > 0.$$

Reciproc, dacă $\lambda_t \lambda_t^* > 0$, atunci λ_t^* este injectiv și deci, din propoziția 29,cap.3, rezultă că λ_t are imagine densă.

(ii) Raționamentul este asemănător cu cel de mai sus.

Încheiem acest paragraf cu unele particularizări și exemplificări ale noțiunilor și rezultatelor de până acum.

Un caz particular remarcabil se obține aplicând criteriul general de controlabilitate și observabilitate sistemului diferențial.

18. Propoziție (Criteriile lui Kalman de observabilitate și controlabilitate pentru sistemul diferențial)

Fie \mathcal{D} sistemul diferențial din exemplul 14(ii) și fie (A, B, C) descompunerea sa canonică.

(i) Descompunerea (A, B, C) este complet observabilă dacă și numai dacă următoarea matrice ("de observabilitate") are rang maxim:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ CA^2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

(ii) Descompunerea (A, B, C) este complet controlabilă dacă și numai dacă următoarea matrice ("de controlabilitate") are rang maxim:

$$\mathcal{R} = \left(B : BA : BA^2 : \dots : BA^{n-1} \right)$$

Demonstrație (i) Conform teoremei precedente, descompunerea este complet observabilă dacă și numai dacă $\theta_t^* \theta_t > 0$, $\forall t \in [0, 1]$, unde, θ_t a fost definit în exemplul 14(ii):

$$\theta_t : R^n \rightarrow L^2(0, 1), (\theta_t \xi)(s) = \begin{cases} Ce^{A(s-t)} \xi, & \text{dacă } s \geq t \\ 0, & \text{dacă } s < t \end{cases}$$

Calculăm acum adjunctul lui θ_t . Reamintim că dacă ξ și η sunt doi vectori (coloane) din R^n , atunci produsul lor scalar este $\xi^T \eta$, unde, ξ^T este transpusul lui ξ .

Pentru orice $\xi \in R^n$ și $f \in L^2(0, 1)$, avem:

$$\begin{aligned} \langle f, \theta_t \xi \rangle_{L^2} &= \int_t^1 f(s) C e^{A(s-t)} \xi ds = \left[\int_t^1 f(s) C e^{A(s-t)} ds \right]^T \xi = \\ &= \left[\int_t^1 e^{A(s-t)} C^T f(s) ds \right]^T \xi = \langle \theta_t^* f, \xi \rangle_{R^n}. \end{aligned}$$

Rezultă deci că pentru orice $t \in [0, 1]$, avem:

$$\theta_t^* f = \int_t^1 e^{A(s-t)} C^T f(s) ds, \quad \forall f \in L^2(0, 1).$$

În concluzie, operatorul $\theta_t^* \theta_t : R^n \rightarrow R^n$ este:

$$\theta_t^* \theta_t \xi = \left[\int_t^1 e^{A(s-t)} C^T C e^{A(s-t)} ds \right] \xi.$$

Deci $\theta_t^* \theta_t > 0$ dacă și numai dacă matricea

$$\int_t^1 e^{A(s-t)} C^T C e^{A(s-t)} ds$$

este strict pozitiv definită, sau, echivalent, dacă

$$0 < \langle \xi, \theta_t^* \theta_t \xi \rangle = \int_t^1 [C e^{A(s-t)} \xi]^T [C e^{A(s-t)} \xi] ds, \quad \forall \xi \in R^n, \xi \neq 0.$$

Rezultă deci că descompunerea nu este complet observabilă dacă și numai dacă există $\xi \neq 0$ astfel încât

$$C e^{A(s-t)} \xi = 0, \quad \forall s \in [t, 1],$$

sau, echivalent

$$C e^{tA} \xi = 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Dezvoltând e^{tA} în serie Taylor, relația de mai sus devine:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{C A^j \xi t^j}{j!} = 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Din teorema de unicitate a dezvoltării în serie de puteri ([8], p.121), rezultă:

$$C A^j \xi = 0, \quad \forall j \in N.$$

Deoarece puterile A^j , $\forall j \geq n$ se pot exprima în funcție de puterile A^j , $0 \leq j \leq n-1$, (consecință a teoremei Hamilton-Cayley), este suficient să avem:

$$CA^j\xi = 0, \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

În concluzie, descompunerea este complet observabilă dacă și numai dacă sistemul linear și omogen $Q\xi = 0$ (cf. notației din enunț) are numai soluția banală, adică matricea Q are rang maxim.

(ii) Raționamentul este analog celui precedent; calculăm mai întâi operatorul $\lambda_t^* : R^n \rightarrow L^2(0, 1)$, pentru care obținem:

$$(\lambda_t^*\xi)(s) = \begin{cases} B^T e^{A^T(t-s)} & \text{dacă } s \leq t \\ 0 & \text{dacă } s > t \end{cases}$$

Rezultă deci că matricea (în baza canonică) a operatorului $\lambda_t\lambda_t^*$ este:

$$\int_0^t e^{A(t-s)} B B^T e^{A^T(t-s)} ds.$$

Repetând raționamentul de la punctul (i), demonstrația se încheie.

19. Observație

Pentru sistemul dinamic linear pe $L^2(R)$ și pentru sistemul discret din exemplul 14(iii) și (iv) se poate enunța și demonstra un rezultat analog celui anterior; lăsăm acest fapt ca exercițiu.

20. Definiție

Sistemul diferențial \mathcal{D} admite următoarea generalizare vectorială.

Fie $m \in N$ și fie

$$L^2([0, 1], R^m) = \left\{ u : [0, 1] \rightarrow R^m ; u \text{ măsurabilă și } \int_0^1 \|u(t)\|^2 dt < \infty \right\}.$$

În definiția de mai sus $\| \cdot \|$ este norma euclidiană din R^m . Cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire cu scalari, $L^2([0, 1], R^m)$ este spațiu vectorial; se demonstrează că aplicația:

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 \langle u(t), v(t) \rangle dt$$

determină pe $L^2([0, 1], R^m)$ o structură de spațiu Hilbert; demonstrațiile acestor afirmații sunt adaptări ale celor din cazul scalar ($m=1$).

Fie $n, p \in N$ și fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(R)$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(R)$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(R)$. Pentru orice $u \in L^2([0, 1], R^m)$, fie $x : [0, 1] \rightarrow R^n$ soluția problemei Cauchy:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \forall t \in [0, 1] ; x(0) = 0.$$

Sistemul diferențial (cazul vectorial) este aplicația

$$\mathcal{D} : L^2([0, 1], R^m) \rightarrow L^2([0, 1], R^p), \mathcal{D}u = y, \text{ unde, } y(t) = Cx(t).$$

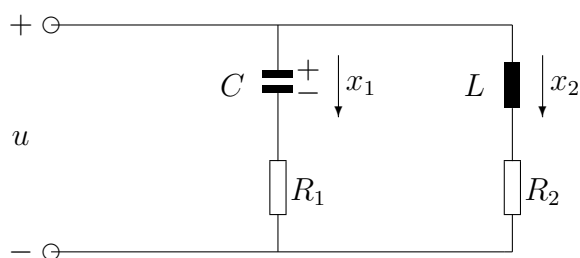
Rezultatele demonstrate pentru cazul scalar sunt adevărate și pentru cazul vectorial, cu adaptările corespunzătoare (care sunt evidente). Să mai observăm că în cazul vectorial matricele de observabilitate, \mathcal{Q} , și controlabilitate, \mathcal{R} , nu mai sunt pătraticе, însă criteriile lui Kalman se enunță la fel ca în cazul scalar (rang maxim).

Propunem ca exercițiu definirea sistemului discret vectorial, a sistemului dinamic liniar vectorial pe $L^2(R)$ și a variantei vectoriale a sistemului din exemplul 14(v).

Sistemele în care intrările și ieșirile sunt funcții cu valori vectoriale se numesc sisteme MIMO (Multi Input, Multi Output), iar cele în care intrările și ieșirile iau valori scalare se numesc SISO (Single Input, Single Output).

21.Exemple ([18],p.125)

(i) Fie R_1, R_2, C, L nenule și să considerăm rețeaua electrică din figura alăturată.



Notăm cu u tensiunea la borne și cu i curentul. Vom considera sistemul (intrare-ieșire) $u \rightarrow i$. Mai întâi, vom reprezenta acest sistem ca un sistem dinamic și apoi vom studia, folosind criteriile lui Kalman, observabilitatea și controlabilitatea reprezentării obținute.

Pentru aceasta, fie x_1 tensiunea pe condensatorul C și x_2 curentul prin inductorul L .

Ecuatiile (diferențiale) ale rețelei sunt:

$$\begin{aligned}x_1' &= -\frac{1}{R_1 C}x_1 + \frac{1}{R_1 C}u, \\x_2' &= -\frac{R_2}{L}x_2 + \frac{1}{L}u.\end{aligned}$$

Curentul i este dat de formula:

$$i = -\frac{1}{R_1}x_1 + x_2 + \frac{1}{R_1}u.$$

Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{R_1}$$

Notând $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, sistemul $u \rightarrow i$ se scrie:

$$x' = Ax + Bu, \quad i = Cx + Du.$$

Pentru a decide dacă descompunerea canonică (A, B, C) este observabilă și (sau) controlabilă, calculăm matricele de observabilitate și controlabilitate; obținem:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{R_1^2 C^2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L^2} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1^2 C} \\ 1 & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}.$$

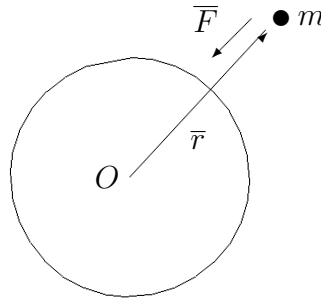
Determinanții acestor matrice sunt:

$$\det \mathcal{Q} = \frac{L - R_1 R_2 C}{R_1^2 C^2 L^2} \quad \text{și} \quad \det \mathcal{R} = \frac{R_1 R_2 C - L}{R_1^2 C L},$$

și deci în acest caz condiția de observabilitate coincide cu cea de controlabilitate și este: $L \neq R_1 R_2 C$.

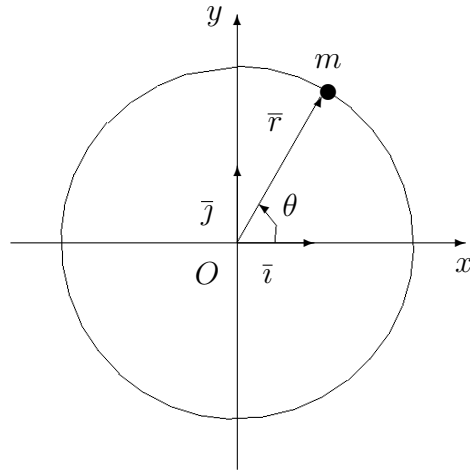
(ii) Problema satelitelui

Considerăm m un punct material (satelitul) care se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale \bar{F} (forța de atracție a Pământului).



Dacă $\bar{r}(t)$ este vectorul de poziție al satelitului față de centrul O al Pământului la momentul t , atunci ecuația mișcării este $m\bar{r}''(t) = \bar{F}$. Din legea atracției universale, rezultă că există o constantă $k > 0$ astfel încât: $\bar{F} = -k \|\bar{r}\|^{-3} \bar{r}$. Demonstrăm acum că mișcarea este plană; pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că produsul vectorial $\bar{r} \times \bar{r}'$ este egal cu un vector constant \bar{v} , (deci vectorul de poziție \bar{r} aparține planului perpendicular pe vectorul \bar{v}). Într-adevăr, avem:

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times \bar{r}') = \bar{r}' \times \bar{r}' + \bar{r} \times \bar{r}'' = \bar{r} \times \frac{1}{m} \bar{F} = -\frac{k}{m \|\bar{r}\|^3} (\bar{r} \times \bar{r}) = \bar{0}.$$



Considerăm, în planul xOy al mișcării, o bază ortonormală, $\{\bar{i}, \bar{j}\}$; fie $r = r(t) = \|\bar{r}\|$ și $\theta = \theta(t)$ coordonatele polare ale satelitului. Prin calcul direct, obținem:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r \cos \theta \bar{i} + r \sin \theta \bar{j}, \\ \bar{r}' &= (r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta) \bar{i} + (r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta) \bar{j}, \\ \bar{r}'' &= (r'' \cos \theta - 2r' \theta' \sin \theta - r (\theta')^2 \cos \theta - r \theta'' \sin \theta) \bar{i} + \\ &+ (r'' \sin \theta + 2r' \theta' \cos \theta - r (\theta')^2 \sin \theta + r \theta'' \cos \theta) \bar{j}. \end{aligned}$$

Înlocuind în expresia lui \bar{F} , obținem:

$$\bar{F} = -\frac{k}{r^3} (r \cos \theta \bar{i} + r \sin \theta \bar{j}).$$

Înlocuind acum în ecuația de mișcare $m\bar{r}'' = \bar{F}$ pe \bar{r}'' și \bar{F} cu expresiile obținute mai sus, obținem relațiile (scalare):

$$\begin{aligned} r''(t) &= r(t) (\theta')^2(t) - \frac{k}{(r(t))^2} \\ \theta''(t) &= -\frac{2r'(t)}{r(t)} \theta'(t) \end{aligned}$$

Comenzile cu ajutorul cărora este controlată poziția satelitului pe orbită sunt $u_1 =$ comanda (acelerația) radială și $u_2 =$ comanda (acelerația) tangențială. Rezultă deci că ecuațiile de mișcare sunt:

$$\begin{aligned} r'' &= r (\theta')^2 - \frac{k}{r^2} + u_1 \\ \theta'' &= -\frac{2r'\theta'}{r} + u_2 \end{aligned}$$

O soluție particulară a acestui sistem este:

$$r(t) = c, \theta(t) = \omega t,$$

unde, c și ω sunt două constante ce verifică relația $c^3\omega^2 = k$. Se observă (din prima egalitate) că traiectoria este circulară, iar viteza unghiulară a satelitului, θ' , este constantă.

Pentru a studia controlabilitatea și observabilitatea sistemului

$$(u_1, u_2) \rightarrow (r, \theta),$$

introducem vectorul de stare (la momentul t), $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, definit prin egalitățile:

$$x_1(t) = r(t) - c, x_2(t) = r'(t), x_3(t) = c(\theta(t) - \omega t), x_4(t) = c(\theta'(t) - \omega).$$

Deducem acum ecuațiile de mișcare (în spațiul stărilor):

$$\begin{aligned} x_1' &= r' = x_2 \\ x_2' &= r'' = r (\theta')^2 + \frac{k}{r^2} + u_1 = (x_1 + c) \left(\frac{x_4}{c} + \omega \right)^2 + \frac{k}{(x_1 + c)^2} + u_1 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= c\theta'' = c \left(-\frac{2r'\theta'}{r} + u_2 \right) = -c \frac{2}{x_1 + c} x_2 \left(\frac{x_4}{c} + \omega \right) + cu_2 \end{aligned}$$

Sistemul diferențial obținut (în necunoscutele x_1, x_2, x_3, x_4) este neliniar; pentru a-l putea studia, liniarizăm ecuațiile (dezvoltând în serie Taylor în jurul originii membrul drept al fiecărei ecuații și păstrând termenii de gradul întâi):

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 \\x'_2 &= 3\omega^2 x_1 + 2\omega x_4 + u_1 \\x'_3 &= x_4 \\x'_4 &= -2\omega x_2 + u_2\end{aligned}$$

Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fie $y_1(t) = r(t) - t = x_1(t)$ și $y_2(t) = c(\theta(t) - \omega t) = x_3(t)$.

Atunci sistemul $u = (u_1, u_2) \rightarrow (y_1, y_2) = y$ se scrie sub forma sistemului dinamic:

$$x' = Ax + Bu, \quad y = Cx.$$

Pentru a studia controlabilitatea și observabilitatea sistemului, calculăm matricele de controlabilitate și observabilitate:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3\omega^2 & 0 & 0 & -6\omega^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{pmatrix}$$

Rangurile matricelor \mathcal{R} și \mathcal{Q} sunt amândouă 4 și deci sistemul este și controlabil și observabil (în ipoteza că amândouă comenzile u_1 și u_2 sunt accesibile și, respectiv, se cunosc amândouă ieșirile y_1 și y_2).

Să presupunem acum că una din cele două comenzi lipsește.

Dacă $u_1 = 0$, (adică lipsește comanda radială), atunci:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observă că și în acest caz rangul matricei \mathcal{R} este 4, deci mișcarea satelitului poate fi controlată numai prin comandă tangențială.

Dacă $u_2 = 0$, (deci lipsește comanda tangențială), atunci:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix}$$

În acest caz, rangul matricei \mathcal{R} este 3, deci satelitul nu poate fi controlat numai prin comandă radială.

Lăsăm ca exercițiu următoarele afirmații:

Dacă se cunoaște numai y_1 , atunci satelitul nu este observabil (radial).

Dacă se cunoaște numai y_2 , atunci satelitul este observabil (tangențial).

Bibliografie

1. **Brânzănescu V., Stănășilă O.**
"Matematici speciale", Editura All, București,1994.
2. **Brezis H.**
"Analyse fonctionnelle", Masson, Paris, 1992.
3. **Colojoară I.**
"Analiză matematică", București, Ed. didactică și pedagogică,1983.
4. **Cristescu R.**
"Analiză funcțională", București, Ed. didactică și pedagogică,1979.
5. **Douglas R.G.**
"Banach algebra techniques in operator theory", Acad.Press,1972.
6. **Dunford N., Schwartz J.T.**
"Linear operators", Interscience Publ.,Part I,1958;Part II,1963.
7. **Feintuch A., Saeks R.**
"System theory; a Hilbert space approach", Acad.Press,1982.
8. **Flondor P., Stănășilă O.**
"Lecții de analiză matematică", Editura All, București,1993.
9. **Halmos P.R.**
"Finite-dimensional vector spaces", Springer-Verlag, N.Y. Inc.,1974.
10. **Halmos P.R.**
"A Hilbert space problem book", Springer-Verlag, N. Y. Inc.,1970.
11. **Hoffman K.**
"Banach spaces of analytic functions", Prentice-Hall, Inc.,1962.
12. **Ionescu V., Varga A.**
"Teoria sistemelor", Editura All, București,1994.
13. **Rudin W.**
"Real and complex analysis", McGraw-Hill,1962.
14. **Rudin W.**
"Principles of mathematical analysis", McGraw-Hill,1964.
15. **Rudin W.**
"Fourier analysis on groups", Interscience Publishers,1962.
16. **Sirețchi Gh.**

"Spații concrete în analiza funcțională", Univ. Buc., 1982.

17. Stanomir D., Stănășilă O.

"Metode matematice în teoria semnalelor", Ed. teh., București, 1980.

18. Șabac Gh., Stănășilă O., Cocârlan P., Topală A.

"Matematici speciale", Ed. didactică și pedagogică, București, 1983.

19. Șabac M.

"Leții de analiză reală", Universitatea București, 1982.

20. Vasilescu F.H.

"Inițiere în teoria operatorilor liniari", Ed. tehnică, București, 1987.